

Astr. P.⁴
301.



Astr. J. 301.

4

Nyers.

Bayerische Staatsbibliothek



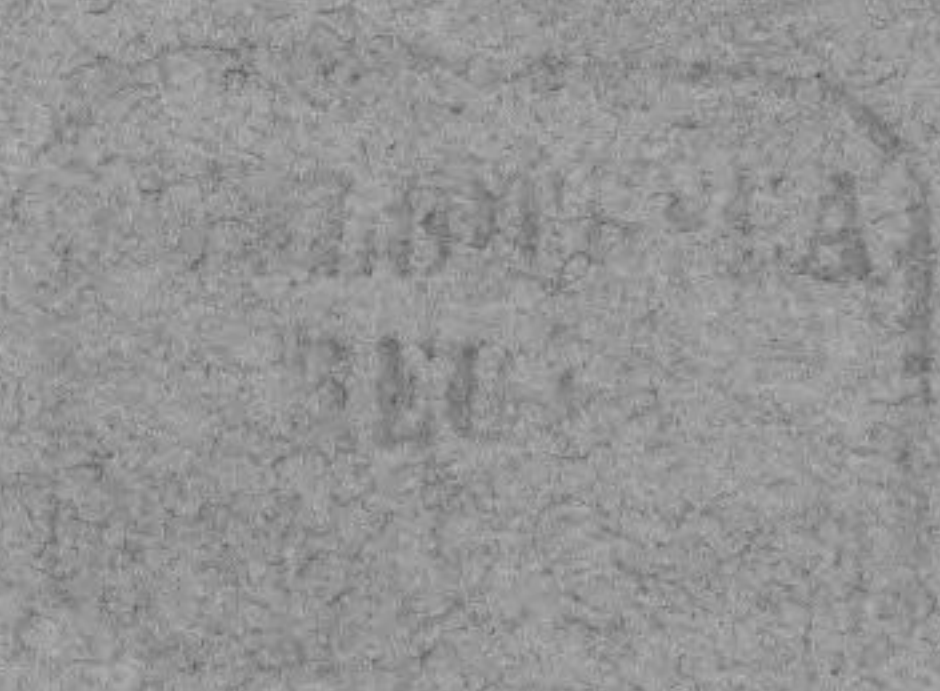
<36645292430012

UNTERSUCHUNGEN
ÜBER DEN
LICHTWECHSEL DES STERNES β LYRAE.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE
BEI DER
PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

VORGELEGT
VON
G. W. MYERS, M. L.
ASSOCIATE PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITY OF ILLINOIS, URBANA.

MÜNCHEN 1896.
AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB.

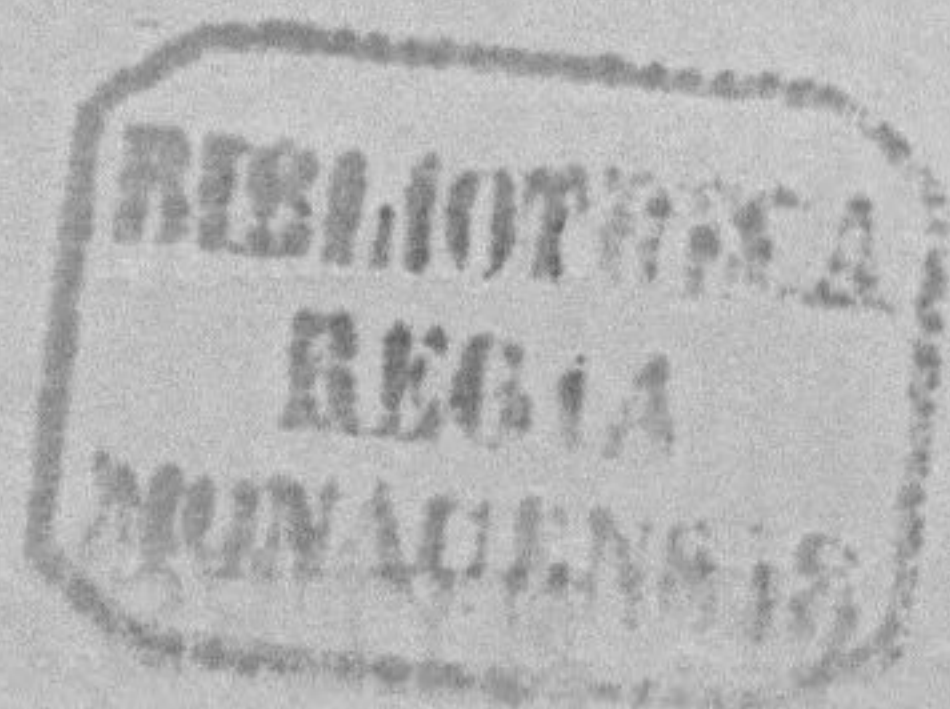


UNTERSUCHUNGEN
ÜBER DEN
LICHTWECHSEL DES STERNES β LYRAE.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE
BEI DER
PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

VORGELEGT
VON
G. W. MYERS, M. L.
ASSOCIATE PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITY OF ILLINOIS, URBANA.

MÜNCHEN 1896.
AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB.



Einleitung.

In neuerer Zeit haben die folgenden drei Theorieen zur Erklärung der Lichtveränderungen der Variablen kurzer Periode den grössten Anklang gefunden:

Erstens, ein Körper mit einer Oberfläche, deren verschiedene Theile verschiedene Helligkeitsgrade aufweisen, rotirt um eine Axe, in einer solchen Weise, dass die Theile der Oberfläche, welche verschiedene Lichtstärke besitzen, sich in regelmässig auf einander folgenden Zeiten dem Auge des Beobachters darbieten.

Zweitens, ein Meteoritenschwarm mit einer an verschiedenen Punkten verschiedenen Dichtigkeit, umkreist einen leuchtenden Körper derart, dass er in regelmässigen Zwischenzeiten sich zwischen dem Beobachter und dem leuchtenden Körper hindurch bewegt.

Gegen diese beiden Theorieen kann in gleicher Weise der Einwurf willkürlicher Aufstellung erhoben werden, obgleich man durch geeignete Annahmen in Bezug auf die Vertheilung der Flecken beziehungsweise Meteoriten jede Art der Variabilität erklären kann.

Es besteht jedoch eine dritte Theorie, die sogenannte Satellitentheorie.

Wenn nämlich die Beobachtungsthatsachen in befriedigender Weise durch die Annahme eines einzigen umkreisenden Körpers erklärt werden können, besteht kein Grund, warum dies nicht als die wahrscheinlichste Erklärung der Lichtveränderlichkeit angenommen werden sollte, so lange keine neue Theorie gefunden ist, die die Thatsachen eben so gut erklärt, und dem Einwurfe der Willkürlichkeit weniger ausgesetzt ist.

Professor Seeliger machte mich darauf aufmerksam, dass der Lichtwechsel von β Lyrae, vermuthlich nach dieser dritten Theorie, sich erklären lassen würde. Es ist also die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, eine Erklärung des Lichtwechsels von β Lyrae auf Grund dieser Theorie zu versuchen.

Dieser Stern (A. R. = $18^h 46^m 12^s$, Decl. = $+ 33^\circ 14'4''$) ist, seit der Entdeckung seiner Variabilität durch Gooderike im Jahre 1784, ein Gegenstand der Forschung gewesen. Abgesehen aber von der Erkenntniss seiner Periodicität und der Feststellung des Vorhandenseins zweier ungleicher Minima durch den Entdecker, wurde unser Wissen in Bezug auf diesen sehr interessanten Variablen durch keine thatsächlich neue Kenntniss vermehrt, bis die bahnbrechenden Arbeiten Argelanders die Grundlage zu einer durch-

greifend praktischen und zugleich streng wissenschaftlichen Methode legten, mittelst welcher der Lichtwechsel der Veränderlichen untersucht werden kann. In Bezug auf eine einfache und genaue Bestimmung der Perioden und Hauptepochen der Variablen lässt diese Methode wenig zu wünschen übrig. Vermittelst derselben bestimmte Argelander mit grosser Genauigkeit die Periode des Lichtwechsels dieses Sternes. Seine erste Lichtcurve wurde im Jahre 1842,¹⁾ eine zweite im Jahre 1844,²⁾ die dritte im Jahre 1859³⁾ veröffentlicht. In Zusammenhang mit der letzten erörterte er in erschöpfender Weise alle zu seiner Zeit vorliegenden Beobachtungen und theilte alle seine vorausgegangenen photometrischen Schätzungen, die sich auf 1500 beliefen und über 19 Jahre erstreckten, in drei Reihen, für welche er je eine Curve aufzeichnete. Nachdem er die Abweichungen dieser drei Curven von einander auf's sorgfältigste erörtert hatte, kam er endlich zu dem Schlusse, dass dieselben zufällige seien und construirte eine mittlere Curve für die ganze Reihe.

Andere Lichtcurven dieses Sternes sind von Oudemans (1856), Schönfeld⁴⁾ und in neuerer Zeit von Professor Schur⁵⁾ und E. Lindemann⁶⁾ veröffentlicht worden. Die von Oudemans und Schönfeld construirten Curven differiren so wenig von der dritten Curve Argelanders, dass die Abweichungen auf die vorliegende Arbeit überhaupt keinen merklichen Einfluss ausüben. Ich habe daher die dritte Curve Argelanders den nachfolgenden Untersuchungen, in so fern sie sich auf die früheren photometrischen Messungen beziehen, zu Grunde gelegt. Die Lindemann'sche Curve, die auf Beobachtungen einer späteren Epoche beruht, habe ich im letzten Paragraph einer besonderen Betrachtung unterzogen.

Bei der Curve Argelanders haben wir zwei fast genau gleiche Maxima mit einer mittleren Helligkeit von 12.33 Stufen, und zwei ungleiche Minima, wovon das erste eine Helligkeit von 3.34 Stufen und das zweite eine Helligkeit von 8.53 Stufen hat, in Rechnung zu ziehen. Wir nehmen also an, dass der Lichtwechsel durch zwei einander umkreisende Körper erzeugt wird, und zwar treten die Maxima ein, wenn die Körper von der Erde aus gesehen rechts oder links neben einander stehen, ohne sich zu verdecken, so dass ihre vollleuchtenden Scheiben sichtbar sind, das erste, tiefere Minimum entsteht durch das Dazwischentreten der dunkleren Scheibe zwischen dem Beobachter und dem helleren Körper, das zweite durch das Vorüberziehen des kleineren Körpers vor dem grösseren. Wir haben also die Bahn eines Doppelsternes zu untersuchen, dessen Componenten abwechselnd in regelmässigen Zwischenzeiten vor einander vorüberziehen. Weil nun die Helligkeit des Sternes, wie aus der eben citirten Angabe hervor-

1) Siehe *Astronomische Nachrichten* XIX, p. 397.

2) *De Stella β Lyrae variabili disquisitio*.

3) *De Stella β Lyrae variabili commentatio altera*.

4) *Astronomische Nachrichten* Bd. LXXV.

5) *Astronomische Nachrichten* 3282, Bd. 137.

6) „Ueber den Lichtwechsel von β Lyrae nach Beobachtung des Herrn Plassmann, St. Petersburg 1894.“

geht, zur Zeit des ersten Minimums um 0.66, zur Zeit des zweiten Minimums aber bloss um 0.36 abgenommen hat, so müssen die Componenten ungleiche Helligkeit besitzen. Eine derartige Bahn wird uns selbstverständlich zwei gleiche Maxima und im Allgemeinen zwei ungleiche Minima liefern müssen. Es dürfte übrigens hier die Bemerkung angebracht sein, dass es wegen des enormen Wechsels der Helligkeit äusserst unwahrscheinlich ist, dass die beiden zuerst erwähnten Theorieen uns ohne allzu willkürliche Annahmen eine befriedigende Erklärung liefern würden.

Wenn nun die Hypothese eines einzigen umkreisenden Körpers zur Erklärung herangezogen wird, müssen die Componenten, wie oben erwähnt, falls die Excentricität nicht ungeheuer gross ist, was nach der unten folgenden Darlegung nicht der Fall ist, des grossen Lichtwechsels halber, ungleiche Helligkeiten besitzen. Ob man den einen oder beide Körper als leuchtende feste Körper oder als mehr weniger sphäroidförmige Schwärme betrachtet, ist, wie Pickering gesagt hat, vollständig belanglos. Die Schlussfolgerungen betreffs des Lichtwechsels würden in beiden Fällen die gleichen sein. Bloss der Einfachheit wegen werden wir annehmen, dass beide Componenten von β Lyrae selbstleuchtende, feste Körper sind und dass beide Scheiben eine gleichmässige Helligkeit besitzen.

Von verschiedenen Seiten sind spectroscopische Untersuchungen dieses Sternes angestellt worden und in § 9 habe ich mir erlaubt, einige Resultate, die sich auf die besten derselben stützen, mitzutheilen. Die vollständigsten spectroscopischen Beobachtungen von β Lyrae sind diejenigen, die A. Belopolsky zwischen dem 24. August und dem 26. November 1892 angestellt und deren Resultate er in ausführlicher Weise in den *Melange math. et ast. t. VII* veröffentlicht hat, und für deren freundliche Ueberlassung ich dem Verfasser zu Dank verpflichtet bin. Sie wurden unter ausserordentlich günstigen Umständen ausgeführt und ich habe mich daher hinsichtlich der spectroscopischen Betrachtungen auf dieselben gestützt.

Ausser Belopolsky haben sich die Professoren Pickering, Vogel, Keeler und Lockyer, sowie Father Sidgreaves mit dem spectroscopischen Studium dieses Sternes beschäftigt und der Forschung werthvolles Material und schätzbare Winke zur Verfügung gestellt.

§ 1.

Ueber die von der Perihelbewegung abhängige Verschiedenartigkeit der Minima eines veränderlichen Sternes.

Obgleich man die Möglichkeit, die Variabilität eines veränderlichen Sternes mit zwei ungleichen Minimis durch zwei einander umkreisende Körper zu erklären, vielleicht als selbstverständlich betrachten kann, dürfte es doch wenigstens von Interesse sein, darauf aufmerksam zu machen, wie das Wesen des Lichtwechsels eines solchen Veränderlichen durch reine Perihelbewegung gänzlich verändert werden kann. Ich halte es deshalb der Mühe werth, diesem Gegenstande einige flüchtige Bemerkungen in diesem einleitenden Paragraphen zu widmen.

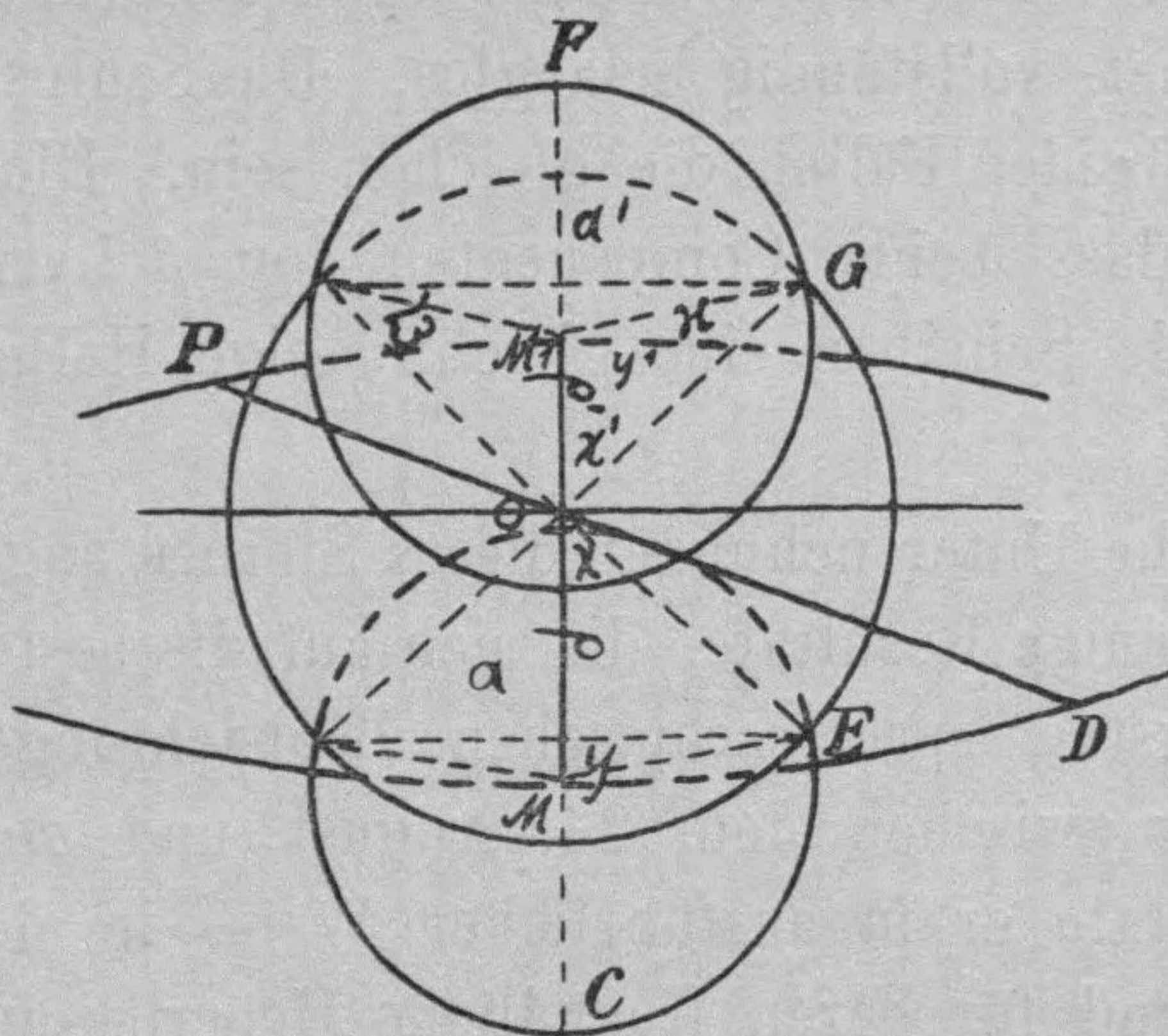


Fig. 1.

Bezeichne:

α, α' die gemeinsamen Theile der Scheiben zur Zeit der oberen respective unteren Conjunction.

r, r' die Radienvectoren zu denselben Zeiten.

ϱ, ϱ' die der scheinbaren Bahn zu diesen Epochen.

κ das Verhältniss des Halbmessers des Begleiters zu demjenigen des Centralkörpers.

λ dasselbe der beiden Helligkeiten im selben Sinne genommen.

$\tilde{\omega}$ die wahre Anomalie des Begleiters zur Zeit der unteren Conjunction.

x, y, x', y' die Winkel $EOC, EMO, GOF, GM'O$ in der Figur.

i die Neigung der Bahn gegen die Projectionseellipse.

L das Verhältniss der Helligkeiten zu den Zeiten der Conjunctionen.

Dann haben wir aus der Figur

$$(1) \quad L = \frac{1 + (1 - \alpha) \lambda \kappa^2}{1 + (\lambda - \alpha') \kappa^2} = \frac{\text{Helligkeit des Min. bei der oberen Conjunction}}{\text{Helligkeit des Min. bei der unteren Conjunction}}$$

Ist nun

$\lambda < \frac{\alpha'}{\alpha}$, so haben wir zwei ungleiche Min., wovon das erste, tiefere auf die untere Conj. fällt,

$\lambda > \frac{\alpha'}{\alpha}$, " " " " " " " " " " " " obere " "

$\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha}$, " " " " gleiche "

$\alpha = 0$, " " " höchstens ein " und zwar bei unterer Conjunction

$\alpha' = 0$, " " " " " " " " oberer "

$\alpha > 0$, " " " mindestens " " " " " " "

$\alpha' > 0$, " " " " " " " " " " unterer "

$\alpha = \alpha' = 0$, " " " überhaupt kein Minimum.

Um nun diese Sachlage geometrisch zu veranschaulichen, wähle ich für die Bahn des Systems eine Ellipse, deren Excentricität gleich 0.66 , und deren Neigung gleich $\arccos(0.25) = 75^\circ 31'$ ist. Ich nehme ferner für den Halbmesser des grösseren Körpers $0.104 a$ und für denjenigen des dunkleren Körpers $0.073 a$, wo a die grosse Halbaxe der Bahn bedeutet. In den beistehenden Figuren wird die Lage der Apsidenlinie AA , in Bezug auf die Knotenlinie KK' , dargestellt, wie sie einem Beschauer erscheint, der sich an irgend einem Punkte der senkrecht zur Bahnebene stehenden Linie befindet.

Bei sämtlichen nebenstehenden Figuren denke man sich, dass die Gesichtslinie im Mittelpunkte des grösseren Körpers senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht. In Fig. 1 ist die scheinbare Bahn durch eine punktirte Linie angedeutet, in den übrigen Figuren aber sind bloss die Lagen GG , KK' , des Begleiters zu den Zeiten der Hauptepochen der Lichtveränderung projectirt worden. Die Minima treten natürlich ein, wenn die Stellungen GG des Begleiters in der wirklichen Bahn solche sind, dass seine Scheibe ganz oder theilweise vor oder hinter der Scheibe des grösseren Körpers projectirt wird. Die Projectionen der Lagen GG sind überall mit $G'G'$ bezeichnet. Ueberdies sind die wirklichen Stellungen des Begleiters zur Zeit des Perihels respective Aphels angedeutet und falls sie nicht mit einer der Lagen für die Hauptepochen zusammenfallen, mit AA bezeichnet. In sämtlichen Figuren stellt die oberhalb der Linie KK' liegende Projection G' die untere Conjunction des Begleiters, die unten liegende Projection G' aber die obere Conjunction dar.

In Fig. 1 fällt die Apsidenlinie mit der Knotenlinie zusammen, folglich ist, was auch die Excentricität sein mag, $a = a'$. In Folge dessen werden die Minima, die zu diesen Epochen vorkommen, gleich oder ungleich sein, je nachdem $\lambda = \frac{a'}{a} = 1$ oder $\lambda \leq 1$ ist. Sind die Minima ungleich, so muss das tiefere auf die untere oder obere Conjunction fallen, je nachdem $\lambda < \frac{a'}{a}$ oder $\lambda > \frac{a'}{a}$ ist. Dies folgt augenblicklich aus (1), da $L > 1$ oder $L < 1$ ist, je nachdem $(1 - a)\lambda - (\lambda - a') = a\left(\frac{a'}{a} - \lambda\right)$ positiv oder negativ ist. Da nun a , $\frac{a'}{a}$ und λ alle wesentlich positive Zahlen sind, so muss dieser Ausdruck positiv oder negativ sein, je nachdem $\lambda < \frac{a'}{a}$ oder $\lambda > \frac{a'}{a}$ ist. Wenn nun $L > 1$ ist, so fällt das tiefere Minimum auf die untere Conjunction. Wenn aber $L < 1$ ist, so fällt dieses Minimum auf die obere Conjunction. Folglich ist die obige Behauptung bewiesen.

Bei dieser Perihellage würde der grösstmögliche Unterschied der Intervalle zwischen den beiden Minimis eintreten, welche Intervalle nicht nur in diesem Falle, sondern auch in den übrigen Figuren nach dem Kepler'schen Gesetze, zu den Flächenräumen $GK'G$ und GKG proportional sein würden. Die Maxima treten

natürlich ein, während beide Scheiben dem Erdbeobachter ihre vollleuchtenden Flächen zeigen.

Fig. 2 stellt den Sachverhalt dar, nachdem eine Perihelbewegung von 15° stattgefunden hat. Hier ist $\alpha' > \alpha$ und die beiden Minima müssen wie zuvor gleich oder ungleich sein, je nachdem $\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha}$ oder $\lambda < \frac{\alpha'}{\alpha}$ ist. Waren die beiden Minima im vorigen Falle aber gleich, so müssen sie im jetzigen ungleich sein und umgekehrt. Jedenfalls ist es möglich, dass eine wesentliche Abänderung in der Art und Weise der Veränderlichkeit durch diese Perihelbewegung verursacht wird. Falls die Minima ungleich sind, würde das tiefere unter denselben Bedingungen, wie bei Fig. 1, auf die obere oder untere Conjunction fallen.

Fig. 3 stellt den Fall dar, nachdem das Perihel sich um 60° bewegt hat. Da $\alpha = 0$ ist, so ist das auf die obere Conjunction fallende Minimum gänzlich verschwunden. Die Helligkeit schwankt hier zwischen weiteren Grenzen als zuvor und statt eines Veränderlichen mit zwei Minimis haben wir jetzt einen Veränderlichen mit bloss einem Minimum zu betrachten.

In Fig. 4 ist $\alpha = 0$ und α' hat seinen Maximalwerth. Die Intervalle Max. II — Min. und Min. — Max. I sind einander gleich geworden und zwischen den Maximis obwaltet die grösstmögliche Ungleichheit.

In Fig. 5 hat das Perihel sich um 235° bewegt, α ist gleich Null geworden und das auf die untere Conjunction fallende Minimum ist verschwunden, während das auf die obere Conjunction fallende Minimum wieder erschienen ist.

Fig. 6 und Fig. 7 zeigen, was möglicher Weise vorkommen könnte, wenn die Excentricität, ohne dass eine Aenderung der Neigung stattgefunden hätte, von 0.66 bis 0.424 abnehmen würde.

In Fig. 6 ist $\alpha = \alpha' = 0$ und der Stern zeigt überhaupt keine Lichtschwankungen mehr, bis das Perihel sich noch weiter bewegt und dadurch einen kürzeren Radiusvector zwischen den Conjunctionspunkt und den Centralkörper gebracht hat, wie es in Fig. 7 veranschaulicht wird.

Bemerkenswerth ist die Thatsache, dass es sich bei einem System, dessen Bahnlage und -gestalt einmal eine Lichtwechselperiode mit zwei Minimis bedingt, niemals ereignen könnte, dass der Veränderliche seine Variabilität durch reine Perihelbewegung gänzlich verliert. Dies könnte, wie aus den obigen Betrachtungen erhellt, bloss bei einem System der Fall sein, dessen Lichtwechsel ein einziges Minimum aufweist. Dass der Stern vielleicht nur vorübergehend unveränderlich ist, erhellt aus der Ueberlegung, dass eine Zunahme entweder in der Excentricität oder in der Neigung die alten Verhältnisse wiederherstellen könnte.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen α , α' und den Bahnelementen in Betracht ziehen und einige dieser Schlussfolgerungen auf einem algebraischen Wege feststellen.

Fig. 1.

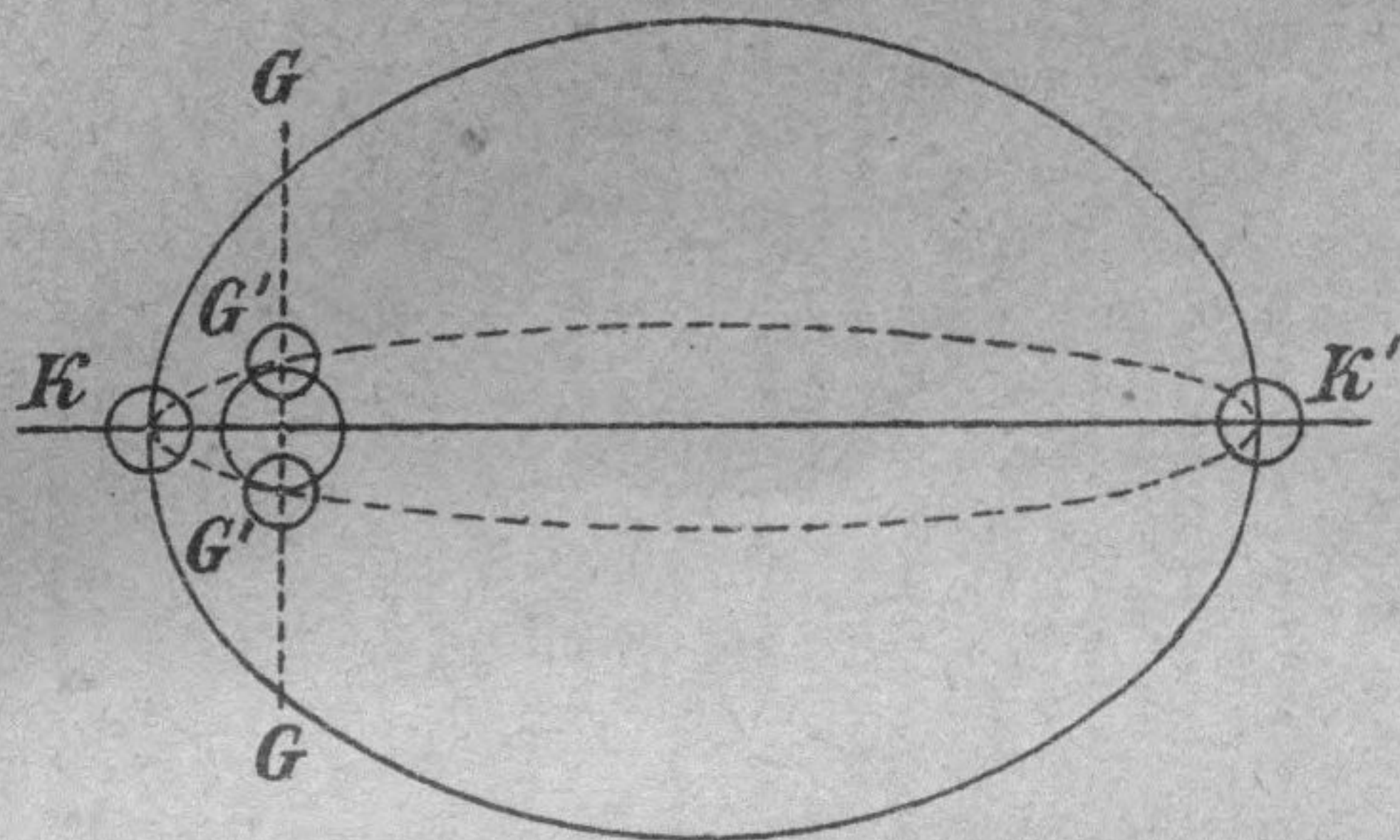


Fig. 2.

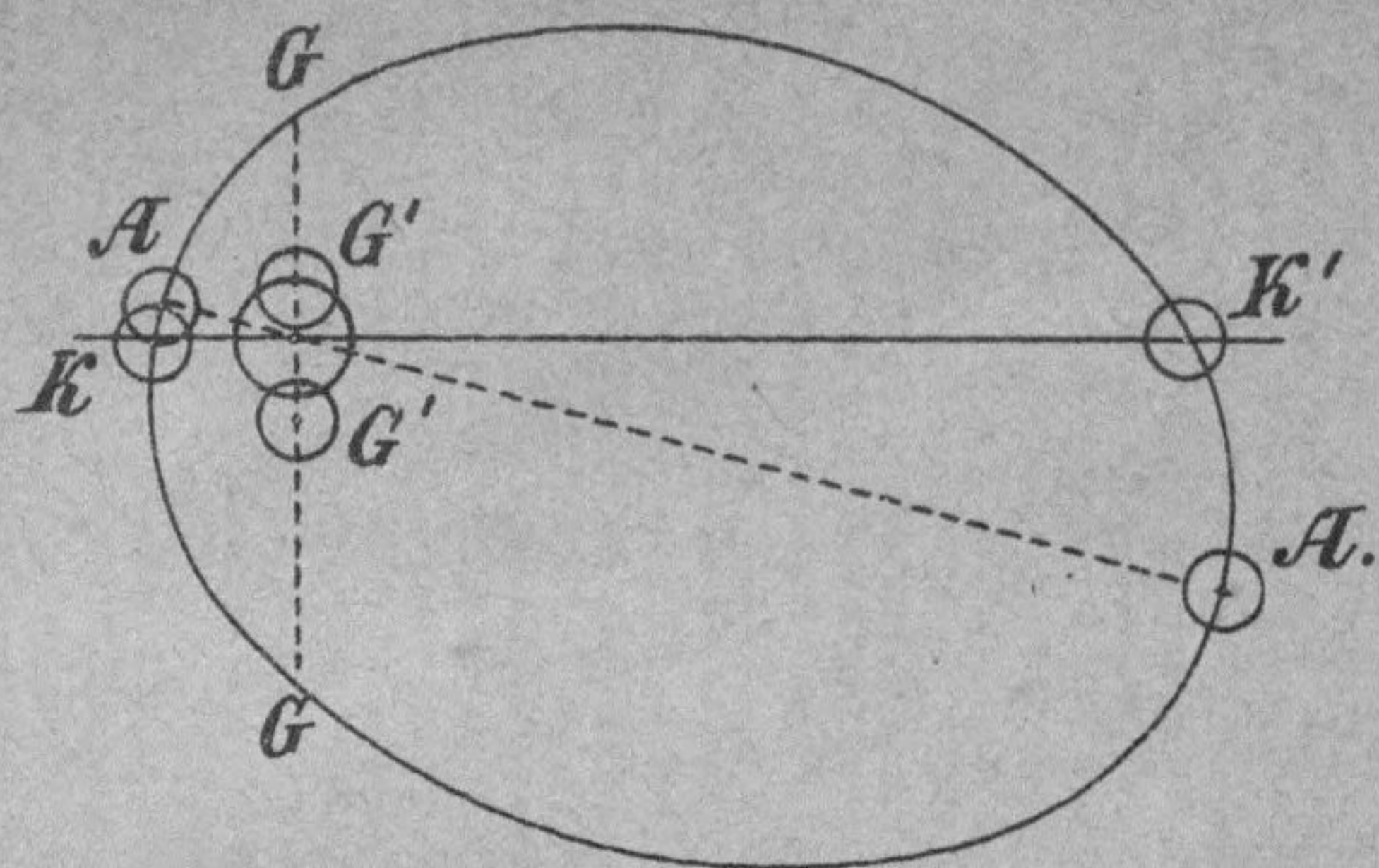


Fig. 3.

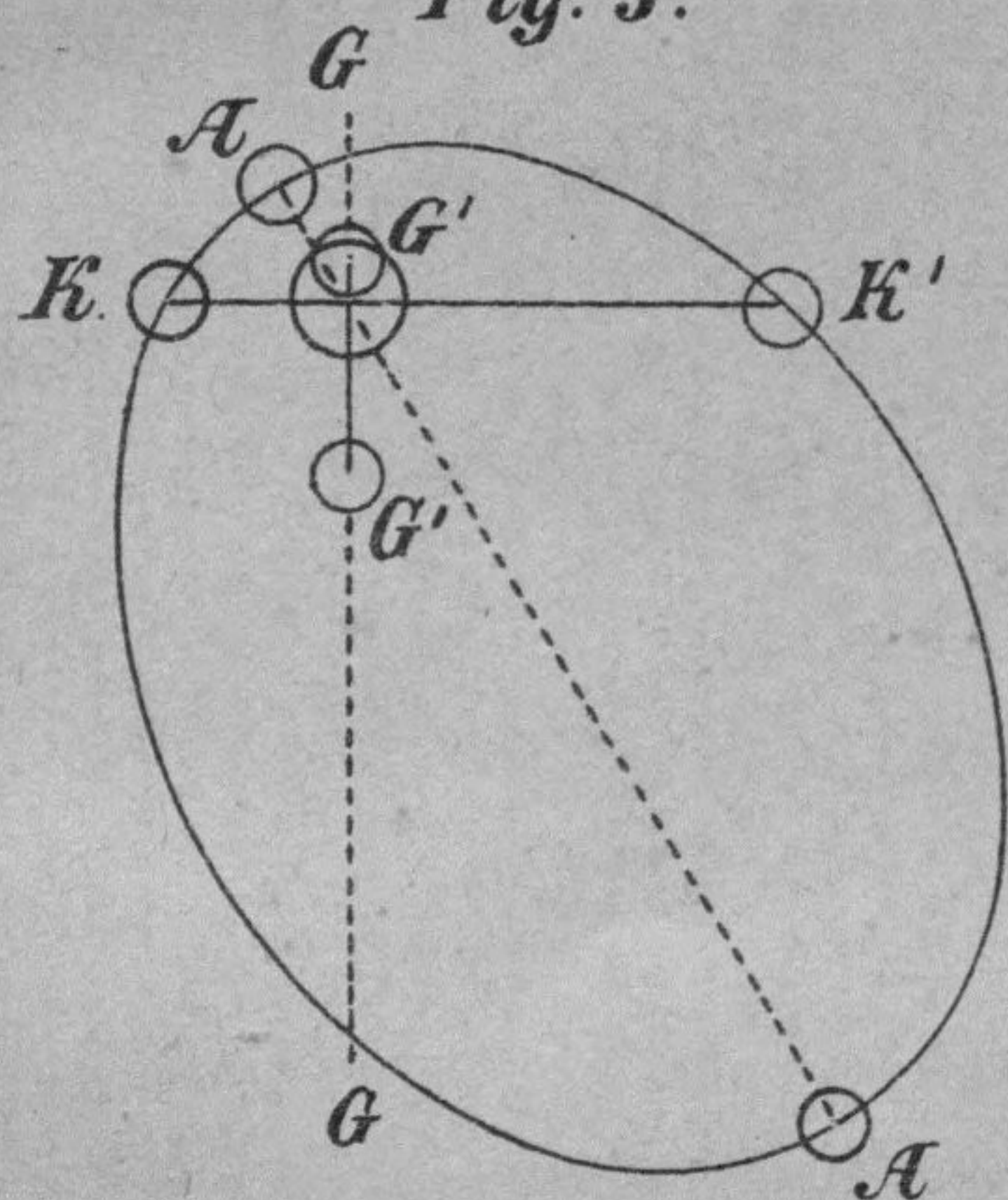


Fig. 4.

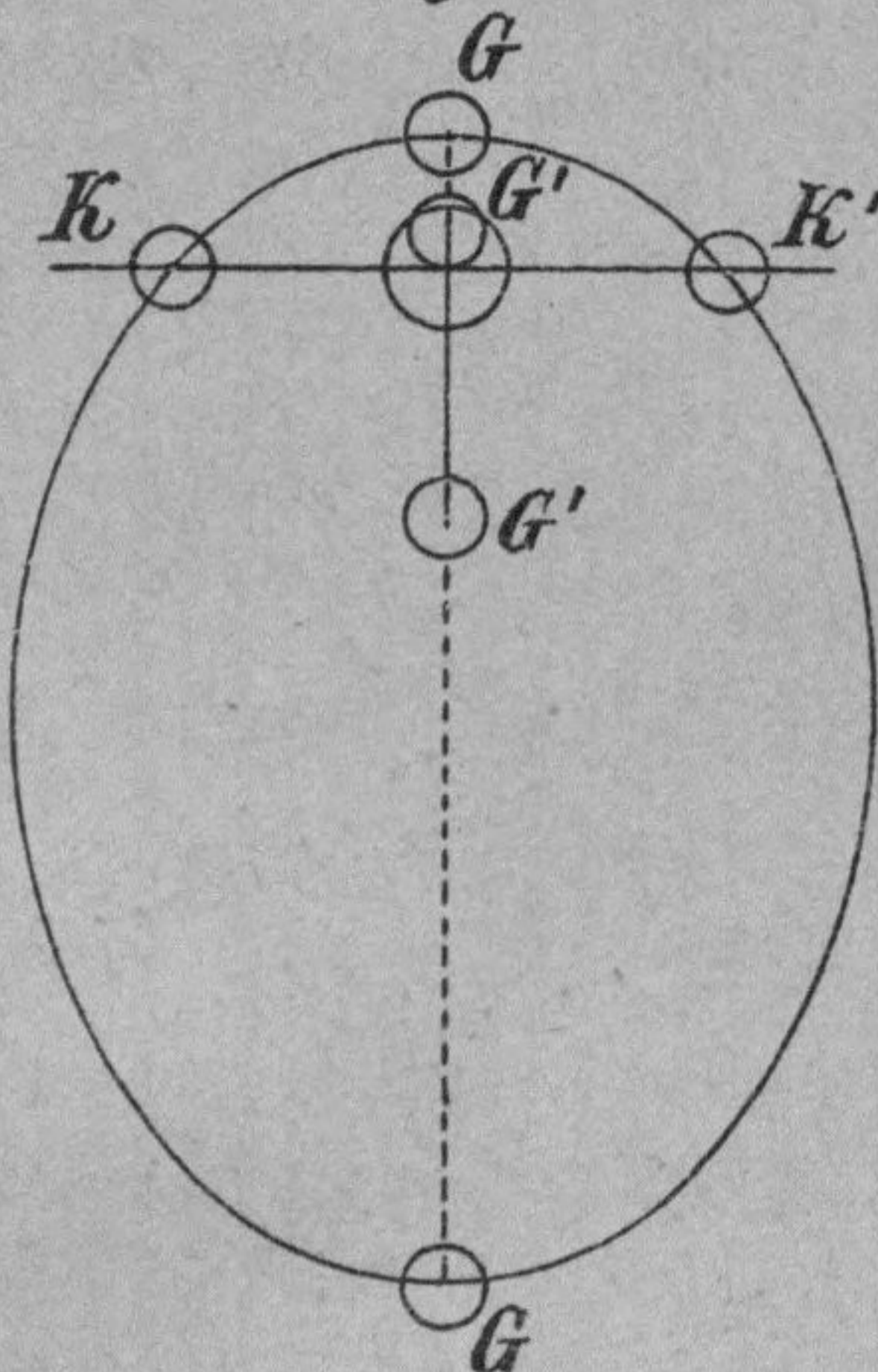


Fig. 6.

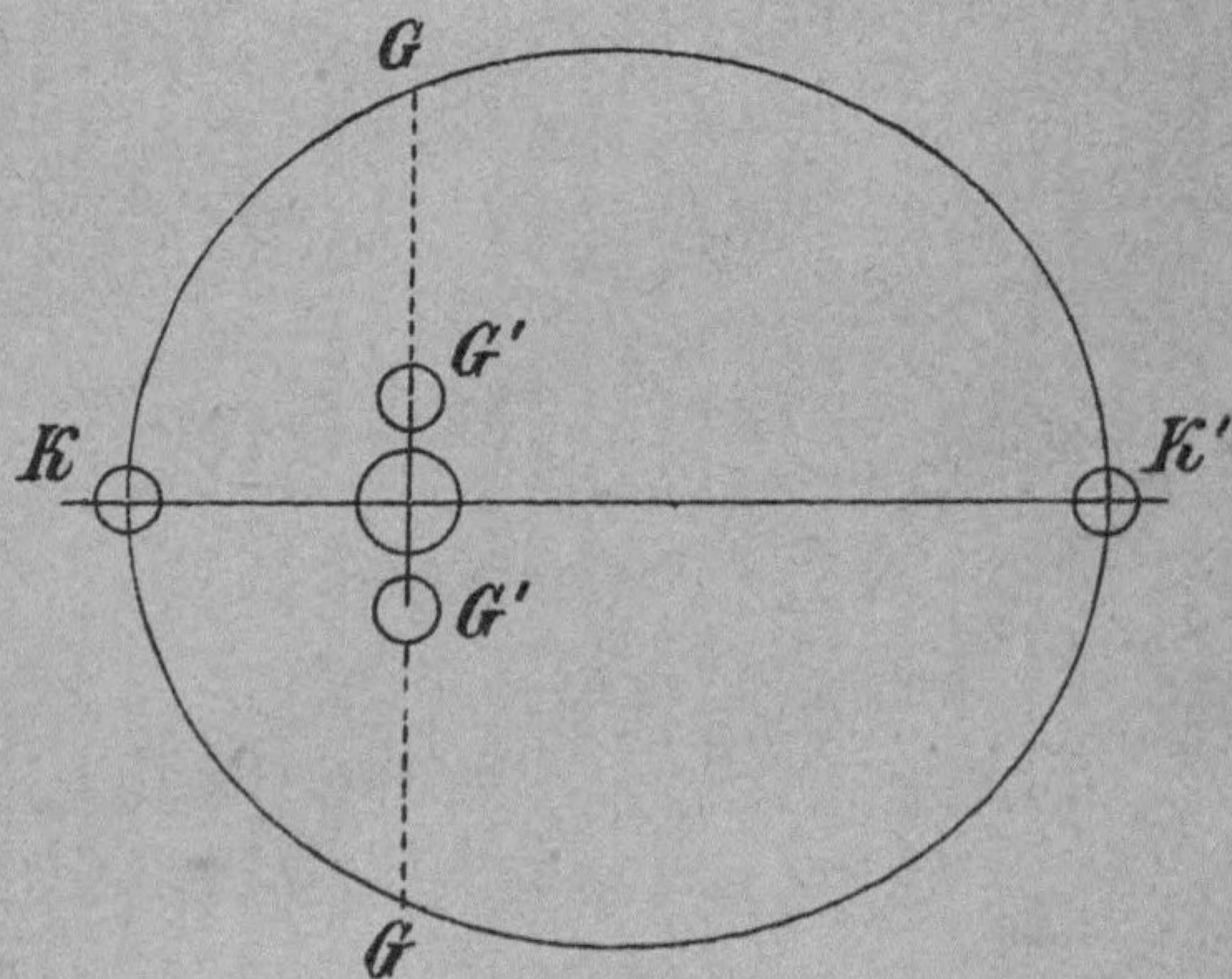


Fig. 5.

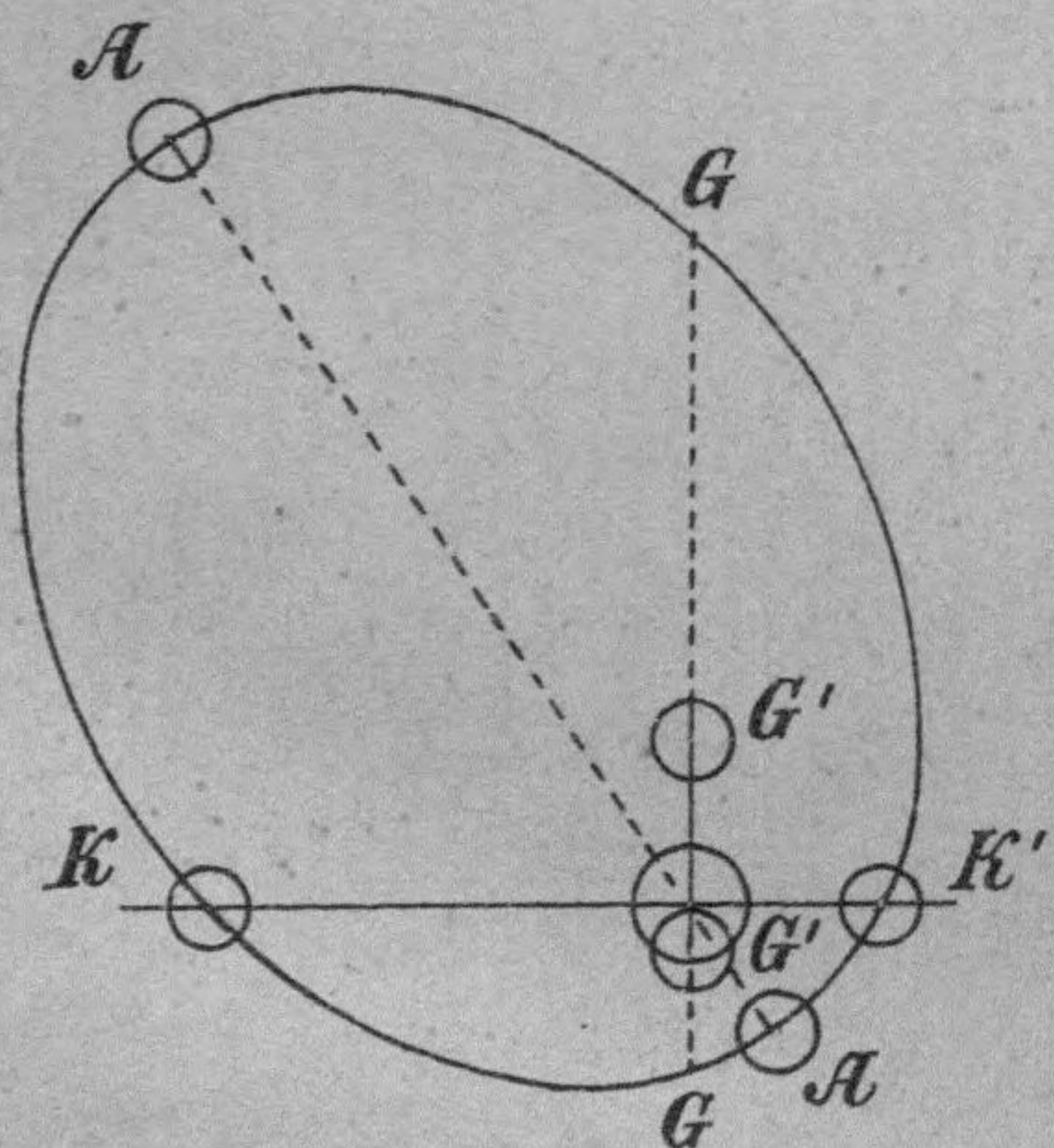
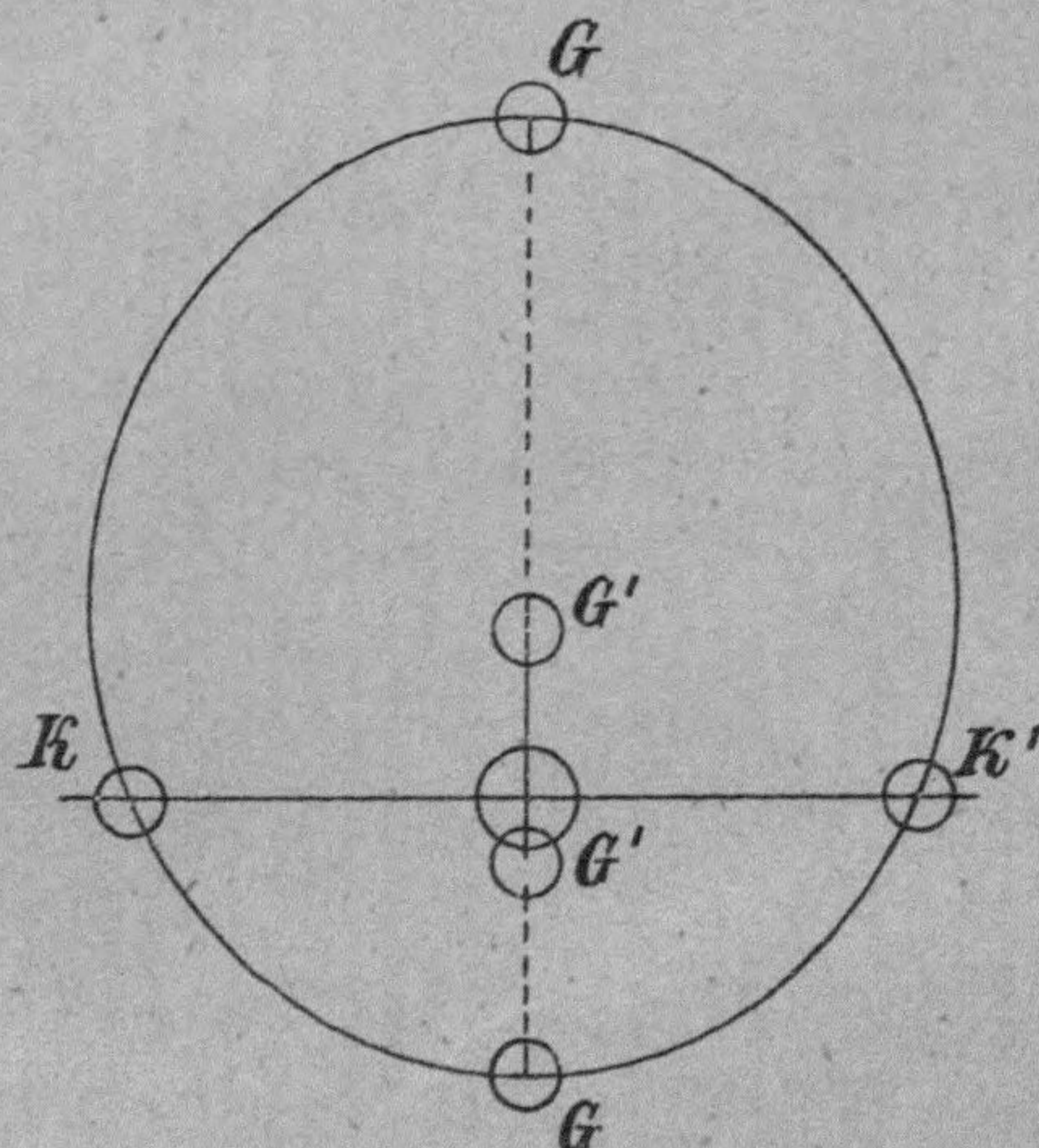


Fig. 7.



Wir können annehmen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, dass

$$\varrho' < \varrho$$

ist. Wir haben

$$\varrho' = r' \cos \sigma, \quad \varrho = r \cos \sigma,$$

wo σ den gemeinsamen Projectionswinkel von r und r' bedeutet, und aus den Gesetzen der elliptischen Bewegung

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \tilde{\omega}}, \quad r' = \frac{p}{1 + e \cos (\pi - \tilde{\omega})}$$

also ist

$$(2) \quad \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{r'}{r} = \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}}.$$

Aus den schiefwinkligen Dreiecken GOM und EOM der Fig. 1 finden wir, dass

$$\alpha = x - \frac{1}{2} \sin 2x + \kappa^2 y - \frac{1}{2} \kappa^2 \sin 2y$$

$$\alpha' = x' - \frac{1}{2} \sin 2x' + \kappa^2 y' - \frac{1}{2} \kappa^2 \sin 2y'$$

ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$(3) \quad \delta = \cos x = \frac{(1 - \kappa^2)(1 - e \cos \tilde{\omega})^2 + \varrho'^2(1 + e \cos \tilde{\omega})^2}{2\varrho'(1 - e^2 \cos^2 \tilde{\omega})}$$

$$(4) \quad \delta' = \cos y = \frac{(\kappa^2 - 1)(1 - e \cos \tilde{\omega})^2 + \varrho'^2(1 + e \cos \tilde{\omega})^2}{2\kappa\varrho'(1 - e^2 \cos^2 \tilde{\omega})}$$

$$(5) \quad \Delta = \cos x' = \frac{1 - \kappa^2 + \varrho'^2}{2\varrho'}$$

$$(6) \quad \Delta' = \cos y' = \frac{-1 + \kappa^2 + \varrho'^2}{2\kappa\varrho'}$$

so können wir schreiben

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = \arccos \delta - \frac{1}{2} \sin 2 \arccos \delta + \kappa^2 \arccos \delta' - \frac{1}{2} \kappa^2 \sin 2 \arccos \delta' \\ \alpha' = \arccos \Delta - \frac{1}{2} \sin 2 \arccos \Delta + \kappa^2 \arccos \Delta' - \frac{1}{2} \kappa^2 \sin 2 \arccos \Delta'. \end{cases}$$

Aus (7) und den Definitionen von δ , δ' , Δ , Δ' ist sofort ersichtlich, dass $\frac{\alpha'}{\alpha}$, α' und α nur von κ und den Bahnelementen abhängen, da

$$(8) \quad \varrho' = \frac{p \cos \sigma}{1 + e \cos \tilde{\omega}}$$

ist. Da übrigens das Wesen der Variabilität des Sternes bloss von $\frac{\alpha'}{\alpha}$, α' und α abhängt, so folgt, dass dasselbe seinen eigenthümlichen Character durch die Bahnelemente erhält.

Aus (3) — (6) ersieht man dann augenblicklich, erstens, dass α sich stetig mit ϱ' , zwischen

$$\varrho' = (1 - \kappa) \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}} \text{ und } \varrho' = (1 + \kappa) \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}}$$

ändert. α nähert sich dem Werthe 1 oder 0, je nachdem ϱ' sich dem ersten oder dem zweiten seiner Grenzwerte nähert; zweitens ersieht man, dass α' eine stetige Function von ϱ' , zwischen

$$\varrho' = 1 - \kappa \text{ und } \varrho' = 1 + \kappa$$

ist. Nähert sich ϱ' dem Werthe $1 - \kappa$, so nähert sich α' der Einheit, der Null aber, wenn ϱ' sich dem Werthe $1 + \kappa$ nähert.

Wenn nun die Bahn eine solche Lage und Gestalt hätte, dass $r' < r$ wäre, und dass

$$\frac{1 - \kappa}{\cos \sigma} \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}} < r' < \frac{1 + \kappa}{\cos \sigma} \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}},$$

oder einfacher

$$\frac{1 - \kappa}{\cos \sigma} < r < \frac{1 + \kappa}{\cos \sigma}$$

ist, dann müsste

$$(9) \quad (1 - \kappa) \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}} < \varrho' < (1 + \kappa) \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}}$$

gelten, folglich wird weder α noch α' gleich der Null sein, und der Veränderliche würde dann zwei gleiche oder ungleiche Minima haben, je nachdem $\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha}$ oder $\lambda \leq \frac{\alpha'}{\alpha}$ gilt.

Wird

$$\varrho' < (1 - \kappa) \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}},$$

so wird $\alpha = 1$; dann haben wir mindestens ein Minimum; wird aber

$$\varrho' > (1 + \kappa) \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}},$$

so haben wir höchstens ein Minimum. Aehnliche Schlussfolgerungen gelten für α' , wenn ϱ' die Grenze $1 - \kappa$ und $1 + \kappa$ überschreitet. Sobald aber $\varrho' > 1 + \kappa$ wird, hört der Stern auf, Lichtschwankungen zu zeigen.

Aus (8) ersieht man, dass ϱ' die Ungleichheit (9) befriedigt, wenn nur $\cos \tilde{\omega}$ dieser Ungleichheit

$$(10) \quad \frac{1}{e} - \frac{p}{e} \cdot \frac{\cos \sigma}{1 - \kappa} < \cos \tilde{\omega} < \frac{1}{e} - \frac{p \cos \sigma}{e(1 + \kappa)}$$

Genüge leistet. Aus derselben Gleichung erhellt, dass $\varrho < 1 + \kappa$ ist, wenn

$$\cos \tilde{\omega} > \frac{p \cos \sigma}{e(1 + \kappa)} - \frac{1}{e}$$

ist.

Wenn nun

$$(11) \quad -\cos \tilde{\omega} < \frac{p \cos \sigma}{e(1+\kappa)} - \frac{1}{e} < \cos \tilde{\omega}$$

erfüllt wird, so ist

$$(1+\kappa) \frac{1 - e \cos \tilde{\omega}}{1 + e \cos \tilde{\omega}} < \varrho' < 1 + \kappa.$$

Wird aber

$$(12) \quad \cos \tilde{\omega} > \frac{p \cos \sigma}{e(1+\kappa)} - \frac{1}{e}$$

erfüllt, so wird

$$\varrho' > 1 + \kappa.$$

Hätte die Bahn des Sternes nun eine solche Perihellage, dass (10) erfüllt würde, so müssten wir zwei gleiche oder ungleiche Minima sehen. Bewegte sich das Perihel bis (11) befriedigt würde, so hätten wir bloss ein Minimum, bewegte sich das Perihel aber bis (12) gälte, so müsste der Stern aufhören, veränderlich zu sein und würde, wenigstens einige Zeit, zu einem invariablen Stern, da in diesem Falle $\alpha = \alpha' = 0$ wird. Wenn aber das Perihel sich noch weiter bewegt und zwar, bis $\cos \tilde{\omega}$ sich zwischen den früheren Grenzen befindet, so wird der Stern wieder anfangen, zuerst schwächere, nach und nach aber stärkere Lichtschwankungen zu zeigen, bis diese einen Höhepunkt erreicht haben, worauf dieselben den Lauf wieder von Neuem beginnen werden.

Da jedoch $\cos \tilde{\omega}$ innerhalb seiner oben genannten Grenzen Werthe annehmen kann, welche bewirken, dass $\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha}$ wird, d. h. die beiden Minima einander gleich werden, so können wir uns vorstellen, wie ein Doppelstern eine Periode von Lichtschwankungen mit zwei gleichen oder ungleichen Minimis oder auch mit einem einzigen Minimum aufweisen kann; andererseits können wir aber auch begreifen, dass derselbe zeitweilig seine Variabilität gänzlich verlieren kann. Vielleicht ist dies ein Erklärungsgrund für das unerwartete Auftauchen veränderlicher Sterne an Orten, wo früher invariable Sterne beobachtet worden waren. Möglicherweise kann es auch zur Erklärung der räthselhaften Schwankungen des Lichtes einiger zeitweilig erscheinenden Sterne beitragen.

§ 2.

Einleitende auf die Curve Argelanders gestützte Erwägungen über die Excentricität der Bahn von β Lyrae.

Wenn die Lichtcurve Argelanders durch zwei vollständig getrennte einander umkreisende Körper erklärt werden soll, so ist sofort ersichtlich: erstens, dass der eine oder die beiden Körper merklich abgeplattet sein müssen; denn wenn dies nicht der Fall wäre, müsste die Lichtcurve horizontal verlaufen, so lange die Körper vollständig auseinander stehen. Während dieser Zeit bleibt nämlich die leuchtende Fläche constant und zwar gleich der Summe der beiden Kreisscheiben, also muss auch die Lichtmenge

constant sein. Da aber die Curve gar keine merkliche Zeitdauer der Maxima zeigt, so muss entweder eine Abplattung der Scheiben vorhanden sein oder die Körper müssen sich berühren. Es können auch beide Fälle zugleich eintreten. Näheres über diesen Gegenstand enthält der nächste Paragraph.

Zweitens, die Excentricität der Bahn muss sehr gering sein. Dies erhellt direct aus der Curve wegen der annähernden Gleichheit der Zeitdauer der beiden die Minima erzeugenden Verfinsterungen sowohl als wegen der kleinen Unterschiede in den vier nachstehenden Hauptintervallen:

$$\text{Min. I} - \text{Max. I} = 3.125 \text{ Tage}$$

$$\text{Max. I} - \text{Min. II} = 3.250 \text{ „}$$

$$\text{Min. II} - \text{Max. II} = 3.167 \text{ „}$$

$$\text{Max. II} - \text{Min. I} = 3.368 \text{ „}$$

Es geht jedoch auch aus dem Folgenden hervor.

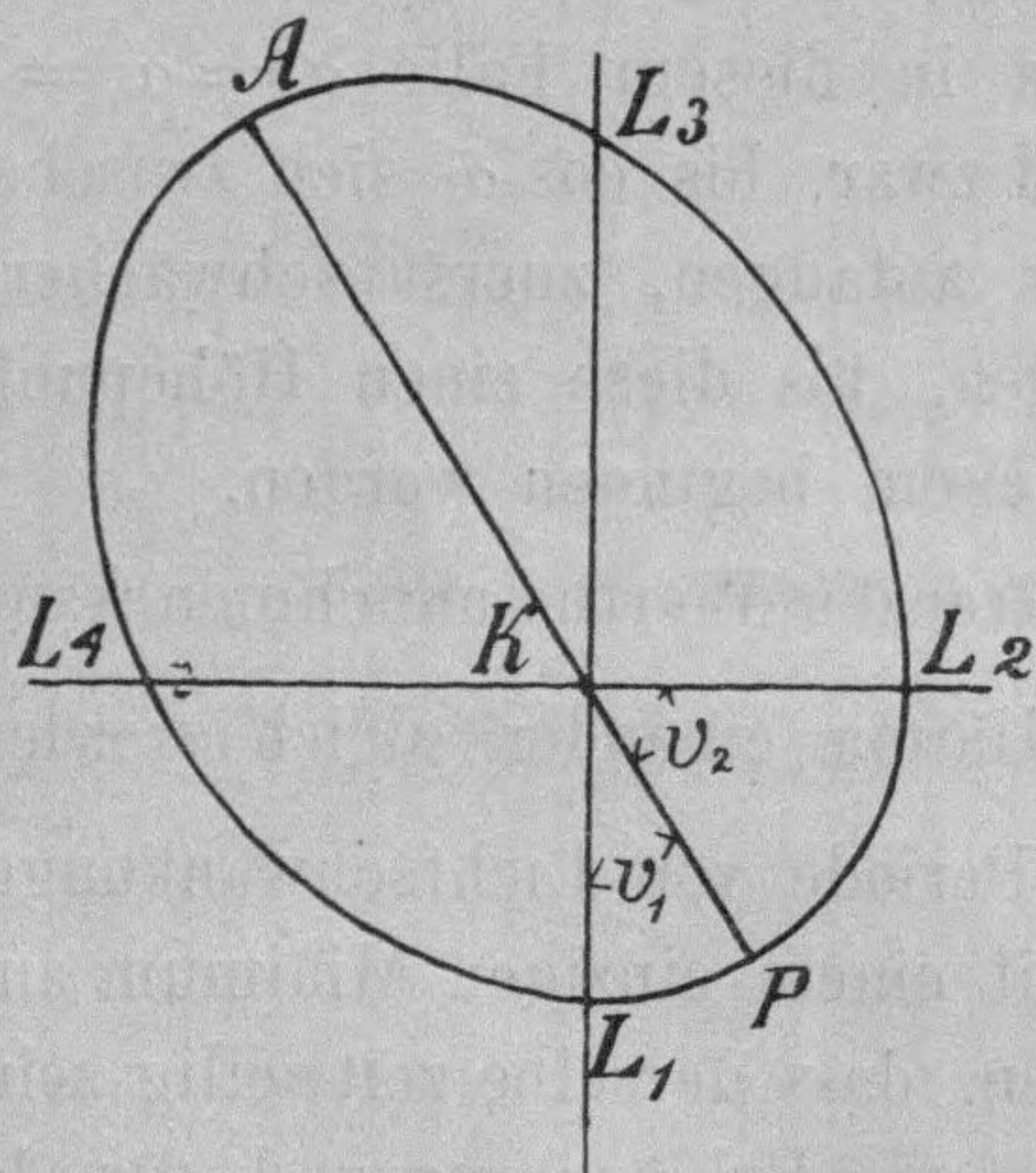


Fig. 2.

Es möge in der beistehenden Figur:

K die Lage des Hauptkörpers

L_1 die des Begleiters zur Zeit des ersten Minimums bezeichnen.

L_2, L_3, L_4 seien die Lagen des letzteren zur Zeit des ersten Maximums, bezw. des zweiten Minimums respective Maximums.

KL_1 bedeute die Richtung der Projection der Gesichtslinie auf die wahre Bahn und

P die Lage des Perihels.

Sowohl die Excentricität wie auch der Winkel zwischen der Apsidenlinie und der Linie KL_1 könnten streng bestimmt werden, indem man das bekannte Verhältniss zwischen der wahren und mittleren Anomalie benützt und die die höheren Potenzen der Excentricität enthaltenden Glieder vernachlässigt, wenn nur die Hauptepochen absolut genau bekannt wären und ferner, wenn dem Kepler'schen Gesetze in engen Doppelsternsystemen mathematisch strenge Gültigkeit zugeschrieben werden könnte. Obgleich man sich nicht auf die Erfüllung weder der einen noch der anderen der erwähnten Bedingungen verlassen darf, wird es doch, um wenigstens einen Ueberblick über die Lage und Gestalt der Bahn zu erhalten, von Nutzen sein, die eventuellen Ungenauigkeiten unberücksichtigt zu lassen, die man dadurch begeht, dass man diese Bedingungen für erfüllt ansieht; denn man kann sich in erster Linie über die möglichen Abweichungen der wirklichen, von den der Argelander'schen Curve entnommenen Hauptepochen von vorneherein beinahe so gut wie gar keine Idee bilden und in zweiter Linie ist es kaum

möglich, sich von den durch etwaige Fluthen erzeugten Störungen der Bahn eine hinreichende Vorstellung zu machen. Im vorliegenden Paragraph wollen wir die aller-einfachste Annahme machen, welche wir über die Abplattung aufstellen können, nämlich, dass den beiden Körpern durch gegenseitige Fluthwirkungen die Gestalt eines Umdrehungsellipsoids gegeben wird, dessen grössere Axen einander stets zugekehrt sind.

Es lautet nun das bekannte Verhältniss zwischen der wahren und mittleren Anomalie

$$v = M + 2e \sin M.$$

Wenden wir dies der Reihe nach auf die Lagen L_1, L_2, L_3, L_4 an, so erhalten wir

$$(1) \quad v_1 = M_1 + 2e \sin M_1$$

$$(2) \quad v_2 = M_2 + 2e \sin M_2$$

$$(3) \quad v_3 = M_3 + 2e \sin M_3$$

$$(4) \quad v_4 = M_4 + 2e \sin M_4$$

Wenn ich die Intervalle Min. I — Max. I, Min. I — Min. II streng befriedige, erhalte ich aus (1), (2), (3)

$$(5) \quad v_2 - v_1 = \frac{\pi}{2} = 2m_1 + 4e \cos(M_1 + m_1) \sin m_1$$

$$(6) \quad v_3 - v_1 = \pi = 2m_2 + 4e \cos(M_1 + m_2) \sin m_2,$$

wo

$$2m_1 = 3.125\mu = 87^\circ 8'4$$

$$2m_2 = 6.375\mu = 177^\circ 46'2$$

$$\mu = \frac{2\pi}{P}; \quad P = 12.91$$

ist. Aus (5) und (6) findet man sogleich

$$\operatorname{tg} M_1 = -\frac{0.6882}{1.1700}$$

und

$$M_1 = -30^\circ 28'.$$

Setzt man diesen Werth in (5) oder (6), so erhält man

$$e = 0.0186.$$

Die Werthe von M_1 und e in (1) ergeben

$$v_1 = -31^\circ 33'.$$

Es ist aber

$$v_4 = 270^\circ + v_1.$$

Aus (4) findet man dann sofort

$$M_4 = 240^\circ 19'.$$

Fügt man zu M_4 das oben gefundene M_1 hinzu und dividirt durch μ , so bestimmt sich die Zeit des zweiten Maximums zu 9.711 Tagen nach dem ersten Minimum. Da

nun nach der Argelander'schen Curve das zweite Maximum 9.542 Tage nach dem ersten Minimum fällt, ersieht man, dass wenn die ersten beiden Hauptintervalle der Lichtcurve streng befriedigt werden, eine Verschiebung des zweiten Maximums um 0.169 Tage = 4^h06 gegen das zweite Minimum erforderlich ist.

Wenn dagegen (1), (2) und (4) angewandt, d. h. wenn die Intervalle Min. I — Min. II, Min. I — Max. II befriedigt werden, so findet man in ähnlicher Weise

$$e \cos (M_1 + 88^\circ 53'.1) = 0.00975$$

$$e \cos (M_1 + 133^\circ 2'.4) = 0.02340$$

und hieraus

$$M_1 = + 209^\circ 32'.4$$

$$e = 0.01956$$

$$v_1 = + 209^\circ 25'.$$

Diese Werthe verlangen eine Verschiebung des ersten Maximums nach rückwärts um ungefähr 4 Stunden.

Weil nun die beiden Werthe von e so klein sind und weil ferner eine so kleine Verschiebung des einen wie des anderen Maximums eine so grosse Aenderung der Perihel-lage (um beinahe 180°) zur Folge hat, so können wir schliessen, dass die Excentricität sehr klein ist. Wir dürfen also jedenfalls als eine erste Annäherung die Excentricität gleich Null setzen.

Wenn man einmal einen angenäherten Werth der Abplattung, oder was dasselbe ist, des Verhältnisses der beiden Axen des Ellipsoids q kennt, so kann man sich einiger-massen über die Entfernung der Mittelpunkte der Componenten und folglich im vor-liegenden Falle auch über die Excentricität orientiren und zwar wie folgt: Man nehme zuerst an, die beiden Körper seien Kugeln, deren Halbmesser die kleineren Halbaxen der respectiven Ellipsoide sind. Man berechne dann eine Lichtcurve, die durch diese Kugeln erzeugt werden würde und von derselben lese man einen unteren Grenzwert der Zeitdauer etwa der das erste Minimum erzeugenden Finsterniss ab. Die wirkliche Zeitdauer der durch die Ellipsoide erzeugten Finsterniss muss sicher länger als dieser abgelesene Grenzwert sein.

Wenn wir so verfahren, indem wir das Verhältniss q nicht zu 1.2, wie es im folgenden Paragraph gefunden werden wird, sondern zu 1.3 nehmen, so finden wir natürlich eine noch kürzere Zeitdauer dieser Finsterniss als der Werth 1.2 sie uns liefern würde. Sagen wir dann ferner, die Verfinsterung habe erst angefangen, nachdem die Curve bedeutend gefallen ist, so müssen wir eine Zeitdauer für die Verfinsterung erhalten, die jedenfalls kurz genug, vielleicht auch viel zu kurz ist. Da aber die Ent-fernung der Mittelpunkte um so grösser wird, je kürzer die Zeitdauer der Finsterniss ist, so können wir durch diese untere Grenze der Verfinsterungsdauer eine obere Grenze der Mittelpunktsentfernung bekommen. Wenn wir auf diese Weise verfahren, und eine Lichtcurve berechnen, wie im nächsten Paragraph erklärt wird, so finden wir, dass die Zeitdauer dieser Finsterniss jedenfalls so gross als 3^d 4^h ist.

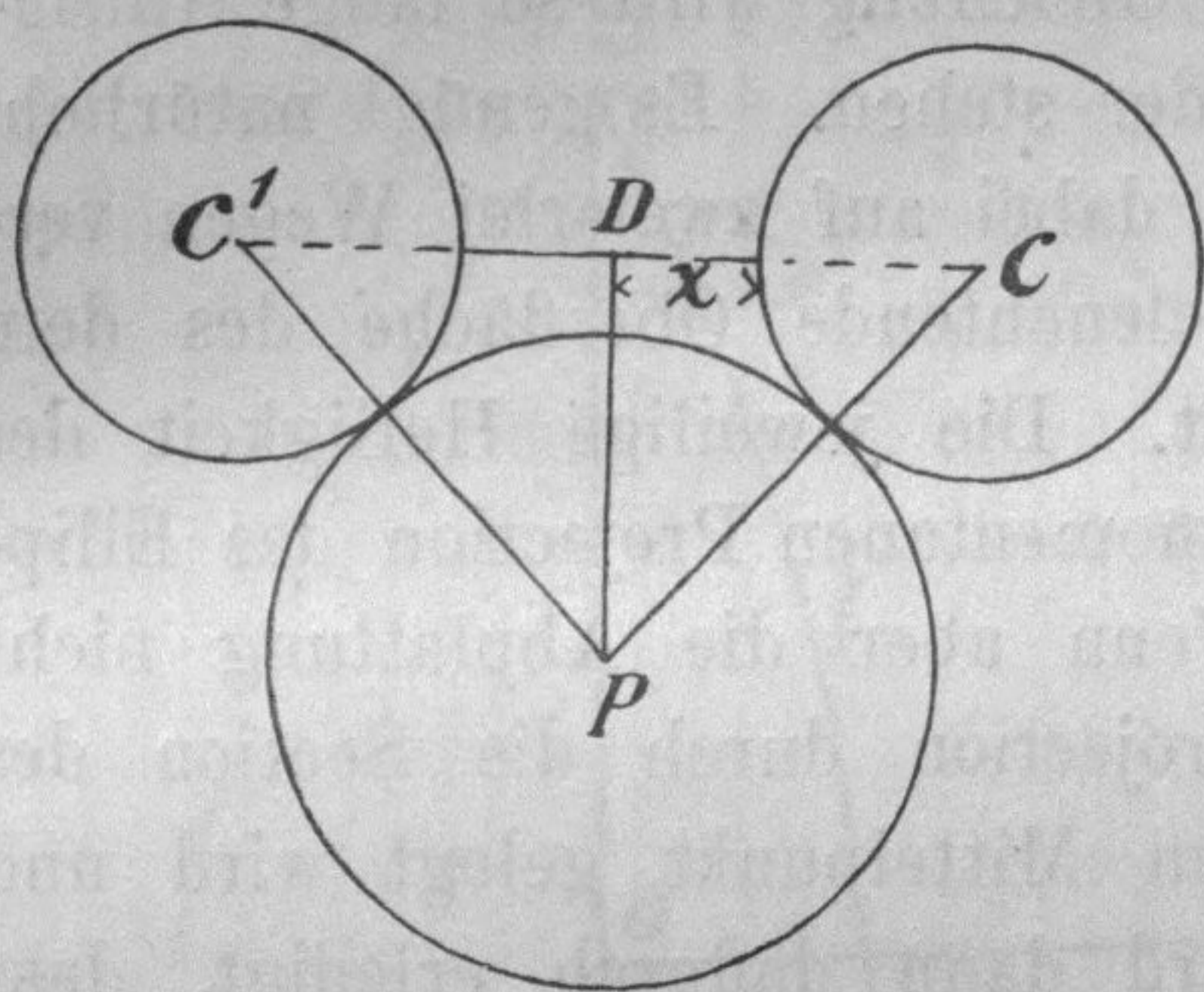


Fig. 3.

Wir nehmen jetzt den grösseren der beiden Halbmesser zur Einheit und bezeichnen mit

κ den kleineren Halbmesser.

r den Radius der wirklichen Bahn.

x die halbe Entfernung zwischen den Stellen, wo der Mittelpunkt des kleineren Körpers sich zur Zeit des Anfangs respective Aufhörens der Finsternisse befindet.

Wir ersehen dann aus der Figur, dass

$$CPC' \geq 3.167 \times 27^{\circ}887 = 88^{\circ}20'$$

folglich auch

$$CPD \geq 44^{\circ}10'$$

ist. Wir haben dann

$$\begin{aligned} r &\leq (x + \kappa) \csc 44^{\circ}10' \\ &\leq 1.435 (x + \kappa). \end{aligned}$$

Da aber

$$x \leq 1 \text{ und } \kappa \leq 1$$

ist, so ist

$$r \leq 2.87.$$

Das heisst die Mittelpunktsentfernung kann unter keinen Umständen grösser als 2.87 mal der kleineren Halbaxe oder 2.4 mal der grösseren Halbaxe des grösseren Körpers sein. Sie kann aber bedeutend kleiner sein. Da nun in einem so ausserordentlich engen Doppelsystem von einer beträchtlichen Excentricität überhaupt nicht die Rede sein kann, so haben wir einen dritten Grund, warum wir die Excentricität bei β Lyrae als klein betrachten können. Ohne Zweifel sind wir also berechtigt, diese vorläufige Annahme zu machen.

§ 3.

Ueber die Abplattung.

Wie vorhin erwähnt, muss das Vorhandensein einer Abplattung angenommen werden, weil die beiden Maxima der Argelander'schen Curve keine angebbare Zeitdauer besitzen. Wir nehmen jetzt an:

1. Die beiden Massen seien getrennt.
2. Die beiden Körper seien durch gegenseitige Fluthwirkung in Umdrehungsellipsoide deformirt.
3. Die Umdrehungs- und Umlaufzeiten seien gleich (= 12.91 Tage).

Nach diesen keineswegs willkürlichen Voraussetzungen gehe ich jetzt dazu über, die Gleichung zur Berechnung jenes Theils der Lichtcurve abzuleiten, welcher aus-

schliesslich durch die Abplattung bedingt wird. Diese Gleichung wird so lange Gültigkeit behalten, als die beiden Körper gänzlich auseinander stehen. Es genügt natürlich, dieselbe für einen der Körper aufzustellen. Man kann dabei auf zweierlei Wegen verfahren. In beiden Fällen nimmt man an, dass die leuchtende Oberfläche des dem Beschauer zugewendeten Körpers gleichmässig hell ist. Die jeweilige Helligkeit des Körpers ist dann, streng genommen, proportional der momentanen Projection des Ellipsoids auf die zur Gesichtslinie senkrechte Ebene. Wenn aber die Abplattung nicht ungemein gross ist, wird es gestattet sein, diese Projection durch die Section des Ellipsoids durch eine Ebene zu ersetzen, die durch den Mittelpunkt gelegt wird und zur Ebene der Bahn senkrecht steht. Die Aufgabe wird dann dadurch erledigt, dass wir das Verhältniss dieser Projection oder dieser Section zu ihrem Werthe an irgend einer beliebigen als Vergleichsmassstab gewählten Stellung auffinden.

Wir könnten also erstens, als die x -Axe die Gesichtslinie, als die y -Axe die Knotenlinie und als die z -Axe die Senkrechte auf den beiden andern wählen, das Ellipsoid auf dieses Coordinatensystem beziehen, indem wir den Anfangspunkt in den Mittelpunkt des Ellipsoids verlegen und dann die Projection des Ellipsoids auf die yz -Ebene direct berechnen, indem wir weiter den Körper um eine zur Bahnebene senkrechte Linie rotiren lassen und eine Rotationsperiode von 12.91 Tagen annehmen.

Zweitens, diese Projection durch die oben erwähnte Section ersetzen, die hier näher definirt werden muss. Wir denken uns jetzt ein rechtwinkliges festes Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des leuchtenden Körpers, dessen x -Axe die Schnittlinie der Bahnebene mit der durch die Gesichtslinie zur Bahnebene senkrecht gelegten Ebene, dessen y -Axe die Knotenlinie und dessen z -Axe die auf den beiden anderen senkrecht stehende Linie ist. Man kann dann die Aufgabe behandeln, indem man annimmt, das Ellipsoid habe eine feste Lage und eine solche, dass seine grosse Axe mit der x -Axe zusammenfällt und dass man, statt die jeweilige leuchtende Fläche durch die oben erwähnte Projection zu ersetzen, dieselbe durch den Flächenraum desjenigen momentanen Durchschnitts ersetzt, den eine gleichmässig rotirende, durch den Anfangspunkt gelegte, auf der Gesichtslinie senkrecht stehende Ebene mit dem gedachten in Ruhe befindlichen Ellipsoid bildet. Um den Beobachtungsthatsachen zu entsprechen, muss man für diese rotirende Ebene eine Umdrehungsperiode von 12.91 Tagen annehmen und da die Abplattung symmetrisch ist, darf man die Bewegungsrichtung völlig ausser Acht lassen. Vermittelst dieser zweiten Betrachtungsweise ersetzt man einfach das wirklich rotirende, durch ein hinsichtlich des Beobachters als ruhig liegend gedachtes Ellipsoid, und die in Bezug auf den Beobachter stillstehende Gesichtslinie durch eine Gesichtslinie mit fingirter Rotation. Das zweite Verfahren liefert einfachere Gleichungen und deshalb ziehe ich es vor.

Es erübrigt jetzt das Verhältniss zwischen dem Flächenraume des oben definirten momentanen Durchschnitts und dem Werthe desselben in irgend einer willkürlich als Vergleichsmassstab gewählten Stellung zu bestimmen.

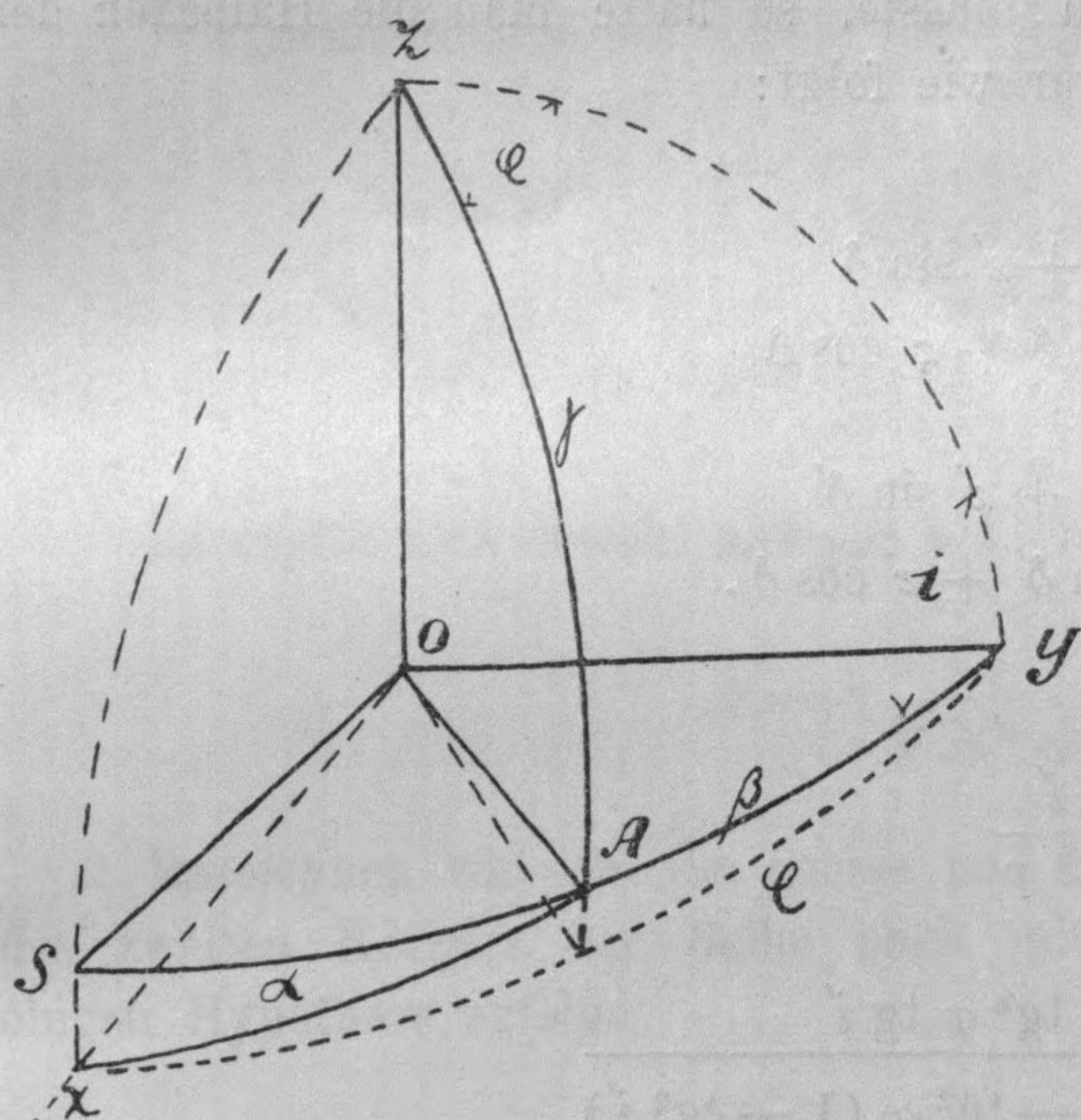


Fig. 4.

Es soll bedeuten

SA ein Stück der wahren Bahn.

i deren Neigung gegen die Projections-ellipse.

α, β, γ die Richtungswinkel der Gesichtslinie.

φ die Projection vom Winkel β auf die xy -Ebene.

R' und R die grosse bzw. kleine Halbaxe des Ellipsoids.

q das Verhältniss $\frac{R'}{R}$; i' sei $= \frac{\pi}{2} - i$.

Dann hat man bekanntlich

$$(1) \quad \frac{x^2}{R'^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$$

für das Ellipsoid und

$$(2) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

für die rotirende Ebene.

Aus der Figur ersieht man

$$(3) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \sin \beta \cos i' & \cos \gamma = \sin \beta \sin i' \\ \cot \beta = \cot \varphi \cos i' & \cos \beta = \cos \varphi \sin \gamma \end{cases}$$

Substituirt man (3) in (2), so erhält man

$$(4) \quad x \sin \beta \cos i' + y \cos \beta + z \sin \beta \sin i' = 0$$

und diese Beziehung, in (1) eingesetzt, ergibt

$$(5) \quad y^2 \left(\frac{\cot^2 \varphi}{R'^2} + \frac{1}{R^2} \right) + 2 y z \frac{\cot \varphi \operatorname{tg} i'}{R'^2} + z^2 \left(\frac{\operatorname{tg}^2 i'}{R'^2} + \frac{1}{R^2} \right) = 1$$

oder

$$(6) \quad x^2 \left(\frac{1}{R'^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{R^2} \right) + 2 x z \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg} i'}{R^2} + z^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 i'}{R^2} \right) = 1.$$

(5) und (6) sind die Gleichungen der Projectionen des gesuchten Durchschnitts auf die yz - bzw. xz -Ebene. Um nun den Flächenraum des Durchschnitts zu finden, muss man den Flächenraum einer dieser beiden Projectionen berechnen und denselben durch den $\csc \varphi$ resp. $\sec \varphi$ multipliciren, je nachdem man (5) oder (6) zu Hülfe nimmt.

Wenn man die Aufgabe allgemein auflösen müsste, so hätte man die Halbaxen der betreffenden Projection zu berechnen und zwar wie folgt:

Man substituirt in (5)

$$(7) \quad \begin{cases} y = y' \cos \delta + z' \sin \delta \\ z = -y' \sin \delta + z' \cos \delta \end{cases}$$

oder in (6)

$$(8) \quad \begin{cases} x = x' \cos \delta' + z' \sin \delta' \\ z = -x' \sin \delta' + z' \cos \delta'. \end{cases}$$

δ und δ' bestimmen sich aus

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2 \cot \varphi \operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg}^2 i' - \cot^2 \varphi}$$

und

$$\operatorname{tg} 2\delta' = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg} i'}{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 i')}$$

worin

$$\varphi = \frac{2\pi}{24P} t$$

ist. P bedeutet die Periode und t die Zeit vom Knoten aus in Stunden gezählt.

Sobald man den numerischen Werth von i' eingesetzt und die genannten Substitutionen ausgeführt hat, erhält man eine Gleichung entweder in y'^2, z'^2 allein aus (5) oder in x_1^2, z_1^2 allein aus (6), woraus man die Quadrate der Halbaxen direct ablesen könnte. Nennen wir die aus der 5. Gleichung abgeleiteten Werthe der grösseren resp. kleineren Halbaxe a, b , die aus der 6. abgeleiteten Werthe derselben a', b' , die Flächenräume dieser Projectionen A_{yz}, A_{xz} und den gesuchten Flächenraum A ; dann hätten wir

$$A_{yz} = \pi a b; \quad A_{xz} = \pi a' b' \quad \text{und} \quad A = \pi a b \csc \varphi = \pi a' b' \sec \varphi.$$

Wenn wir als Vergleichungsstellung diejenige wählen, wo $\varphi = \varphi_1$, $a = R'$ und $b = R$ ist, so könnten wir schreiben:

$$V = \frac{a b \csc \varphi}{R' R \csc \varphi_1} = \frac{a' b' \sec \varphi}{R' R \sec \varphi_1}.$$

Dies wäre die vollständigste Auflösung des Problems.

Aus der verhältnissmässig langen Zeitdauer der Finsternisse, wie sie aus der Curve hervorgeht, vermuthet man, dass die Neigung nicht um ein Beträchtliches von $\frac{\pi}{2}$ abweichen kann. Wir können desshalb im ersten Versuche die Neigung gleich $\frac{\pi}{2}$ setzen. Wir werden später sehen, dass das i' gleich Null gesetzt werden muss.

Wir nehmen also an, dass $i' = 0$ ist und finden dann aus (5) und (6)

$$(9) \quad y^2 \left(\frac{\cot^2 \varphi}{R'^2} + \frac{1}{R^2} \right) + \frac{z^2}{R^2} = 1$$

$$(10) \quad x^2 \left(\frac{1}{R'^2} + \frac{\tan^2 \varphi}{R^2} \right) + \frac{z^2}{R^2} = 1.$$

Es ergibt sich sowohl aus (9) als (10) der gesuchte Flächenraum

$$A = \pi \frac{R' R^2}{\sqrt{R'^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Bezeichnen wir nun die grosse und kleine Halbaxe und den gesuchten Flächenraum des zweiten Körpers der Reihe nach mit B' , B und A' , so haben wir der dritten obigen Hypothese zufolge

$$A' = \pi \frac{B' B^2}{\sqrt{R'^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi}},$$

da die translatorische Bewegung des Begleiters hier natürlich nicht in Betracht kommt.

Wählen wir jetzt für jeden der beiden Körper als Vergleichsstellung diejenige, welche er einnimmt, wenn er dem Beobachter die grosse Axe zukehrt, d. h. setzen wir $\varphi_1 = 90^\circ$, und sehen wir vorläufig von den Wirkungen der Finsternisse ab; dann haben wir, wenn

L das Verhältniss der Gesamtlichtstärke der beiden momentanen elliptischen Scheiben zur selben Lichtstärke, wenn die beiden Körper sich in der gewählten Vergleichungsstellung befinden,

λ das Verhältniss der Helligkeiten der Körper und

κ das Verhältniss $\frac{B}{R}$ bedeuten

$$L = \frac{\pi R'_t R + \pi \lambda B'_t B}{\pi R^2 + \pi \lambda B^2} = \frac{1}{1 + \kappa^2 \lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \cos^2 \varphi}} + \frac{\lambda \kappa^2}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{B}{B'}\right)^2 \cos^2 \varphi}} \right)$$

R'_t und B'_t sind die grossen Halbaxen der Durchschnitte der beiden Körper, deren Flächenräume den respectiven jeweiligen leuchtenden Oberflächen proportional sind. Sie sind natürlich Functionen der Zeit, deren Zusammenhang mit den Halbaxen R' , R , B' , B durch die Gleichungen

$$R'_t = \frac{R' R}{\sqrt{R'^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi}} \quad \text{und} \quad B'_t = \frac{B' B}{\sqrt{B'^2 \sin^2 \varphi + B^2 \cos^2 \varphi}}$$

gegeben ist.

Um ziemlich mühsame Verwicklungen zu vermeiden, habe ich nun die Abplattungen beider Körper gleichgesetzt, und

$$q = \frac{R'}{R} = \frac{B'}{B} \quad ^1)$$

angenommen.

Aus den Definitionen von R'_t und B'_t folgt dann, dass

$$(11) \quad z = \frac{B'_t}{R'_t} = \frac{B}{R} = \frac{B'}{R'}$$

ist. Diese Annahme, dass die beiden Ellipsoide ähnlich sind, habe ich in den folgenden Paragraphen beibehalten.

Die gesuchte Gleichung lautet dann folgendermaassen:

$$(12) \quad L = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{1}{q^2} \cos^2 \varphi}},$$

wo $\varphi = \frac{\pi}{12P} t$ (t in Stunden) ist.

Vermittelst (12) berechnet man, und zwar für jeden beliebigen Zeitpunkt, sobald man den richtigen Werth von q hat, das Verhältniss der momentanen Gesammthelligkeit zweier einander umkreisenden Kugeln, deren Lichtintensitäten sich zu einander wie 1 zu λ verhalten und deren Halbmesser gleich den kleineren Halbachsen der respectiven Ellipsoide sind, zu der jeweiligen Gesammthelligkeit der beiden Ellipsoide. Wenn nun die Lichtschwankungen von β Lyrae durch zwei ähnliche abgeplattete Ellipsoide zu erklären sind, kann man einen annähernden Werth des Verhältnisses q direct aus der Lichtcurve finden, dadurch dass man zu verschiedenen Zeiten vor und nach den Maximis und für verschiedene nach Belieben gewählte Werthe von q , die zugehörigen Werthe von L aus (12) berechnet und dieselben von den entsprechenden Ordinaten der Lichtcurve abzieht. Die Punkte, deren Ordinaten diese Unterschiede sind, müssen dann auf einer Curve liegen, die durch zwei sich umkreisende Kugeln erzeugt werden könnte. Selbstverständlich muss eine solche Curve, vorausgesetzt, dass die Kugeln vollständig getrennt sind, horizontal verlaufen, so lange die Scheiben ganz auseinander stehen. Diese Betrachtungen geben uns ein Mittel an die Hand, den gesuchten angenäherten Werth von q zu finden. Wir brauchen nur derartige Curven für beliebig angenommene Werthe von q zu berechnen, bis wir eine Curve finden, die einige Zeit in der Nähe der Maxima horizontal verläuft. Derjenige Werth von q , der eine solche Curve liefert, ist dann die gesuchte Approximation.

1) Da die Helligkeitsabweichungen der in § 7 berechneten Lichtcurve nicht symmetrisch gegen die Minima verlaufen, so kann die Annahme, dass die beiden Körper ungleiche Abplattungen besitzen, die Darstellung nicht wesentlich verbessern, so lange diese Abplattungen symmetrisch sind.

Für die Werthe 1.1, 1.2, 1.25 und 1.3 von q berechnete ich vermittelst der Gleichung (12) solche Curven für Intervalle von 10^0 zu 10^0 für 20 Stunden, bis die berechnete Curve anfang sich rasch zu senken. Jedenfalls mussten die Finsternisse dann begonnen haben.

Die Curve, die aus der Argelander'schen zu diesem Zwecke construiert wurde, bildete ich dadurch, dass ich das zweite Minimum um 1.9 Stunden gegen das zweite Maximum verschob, und dann bei dem Zeitpunkte des verschobenen Minimums die Curve umklappte und die Mittelwerthe aus den Ordinaten benützte, die zu gleichen Zeiten vor und nach dem ersten bzw. verschobenen zweiten Minimum abgelesen wurden. Die vorgenommene Verschiebung des zweiten Minimums entfernte keinen Punkt der wirklichen von der so construirten Mittelcurve um mehr als circa 0.18 Stufen und da der mittlere Fehler eines solchen Punktes 0.17 Stufen beträgt, wie ihn Argelander gegeben hat,¹⁾ so war meiner Meinung nach diese Verschiebung gerechtfertigt. Die Resultate der Rechnungen mit diesen vier Werthen von q sind in der folgenden Tafel mitgetheilt, worin

Y_b die berechneten Ordinaten,

Y_a die zugehörigen von der Mittelcurve abgelesenen Ordinaten,

Y_z die Unterschiede $Y_a - Y_b$ bezeichnen.

φ	Y_a	Y_b	Y_b	Y_b	Y_b	Y_z	Y_z	Y_z	Y_z
130°	10.90		0.57	0.68	0.78		10.33	10.22	10.12
140°	11.38	0.45	0.83	1.00	0.95	10.93	10.55	10.38	10.43
150°	11.84	0.59	1.09	1.32	1.54	11.25	10.76	10.52	10.30
160°	12.10	0.70	1.32	1.61	1.88	11.40	10.78	10.49	10.22
170°	12.26	0.78	1.48	1.81	2.12	11.48	10.78	10.45	10.14
180°	12.33	0.80	1.54	1.88	2.20	11.53	10.79	10.45	10.13

Die in den 3., 4., 5. und 6. Spalten befindlichen Zahlen sind der Reihe nach mit den Werthen 1.1, 1.2, 1.25 und 1.3 von q berechnet worden.

Ein Blick auf die in Spalte 8 enthaltenen Zahlen überzeugt uns, da die Unterschiede von $\varphi = 150^0$ ab, also in der Nähe der Maxima, bloss ein paar Einheiten in der zweiten Decimalstelle betragen, dass 1.2 ein angenäherter und sogar ziemlich genauer Werth von q ist. Wir werden später sehen, dass dies sich bestätigt.

Wie schon oben erwähnt wurde, behält die Gleichung (12) ihre Gültigkeit nur so lange die beiden Körper vollständig auseinander stehen. Im folgenden Paragraph gehe ich dazu über, diejenigen Gleichungen abzuleiten, deren man sich während der Finsternisse bedienen kann.

1) S. De Stella β Lyrae variabili commentatio altera, Seite 13.

§ 4.

Aufstellung der Gleichungen, die während der Finsternisse anzuwenden sind.

Die vorliegende Aufgabe lautet wie folgt:

Zu bestimmen ist das Verhältniss der momentanen Gesamthelligkeiten zweier gleichmässig beleuchteter, ähnlicher Ellipsoide, die die in § 3 aufgestellten 3 Hypothesen befriedigen und deren einzelne Scheiben ungleiche Helligkeit besitzen zu der Gesamthelligkeit der Scheiben zur Zeit der maximalen Lichtphase. Diese maximale Lichtphase tritt natürlich ein zur Zeit, wo die Centrallinie senkrecht zur wirklichen Gesichtslinie steht.

Wir ersetzen wieder die jeweiligen leuchtenden Ellipsoidenoberflächen durch die früher definirten, elliptischen Durchschnitte und setzen

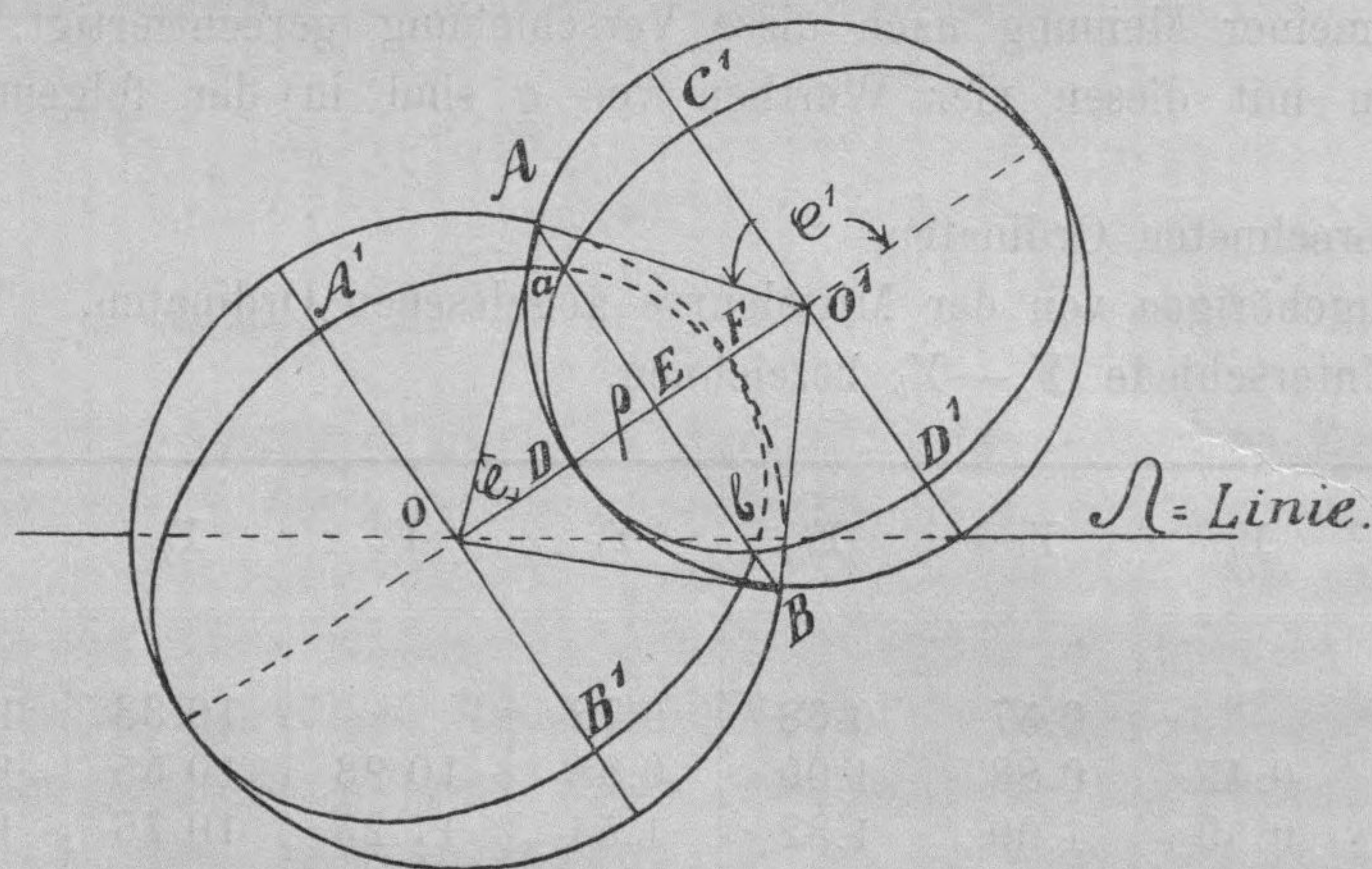


Fig. 5.

$$OA = R_t; OA' = R; O'A = B_t; C'O' = B.$$

$$AOE = \varphi; AO'E = \varphi'' = \pi - \varphi' \text{ und } OO' = \varrho.$$

J_I und J_{II} sollen die Verhältnisse der momentanen Helligkeit zu den gewählten Zeiten während der Finsternisse des ersten bzw. zweiten Minimums zu derjenigen gleichzeitigen Helligkeit darstellen, die durch die beiden jeweiligen vollleuchtenden Ellipsen erzeugt werden könnte.

J_I und J_{II} sollen die gesuchten Verhältnisse während der das erste bzw. zweite Minimum erzeugenden Verfinsterungen bedeuten.

Aus der Geometrie wissen wir, da die beiden momentanen Ellipsen ähnlich sind (siehe (11), § 3), dass die Schnittpunkte A, a, b, B auf einer senkrecht zur Centrallinie stehenden Linie liegen und ferner dass

$$aEbDa = \frac{B}{B_t} \times AEBDA, \quad aFBEa = \frac{R}{R_t} \times AFBEA$$

ist.

Folglich wird

$$J_I = \frac{\pi R R_t - \frac{R}{R_t} \times A D B F A + \pi \lambda B B_t}{\pi R R_t + \pi \lambda B B_t} = \frac{\pi - \frac{1}{R_t^2} \{R_t^2 \varphi + B_t^2 (\pi - \varphi') - R_t \varrho \sin \varphi\} + \pi \lambda \kappa^2}{\pi (1 + \lambda \kappa^2)},$$

da

$$A D B F A = R_t^2 \varphi + B_t^2 (\pi - \varphi') - \varrho R' \sin \varphi \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{B}{R}$$

ist. Setzen wir jetzt

$$(1) \quad \varrho' = \frac{\varrho}{R_t} = \frac{\sin(\varphi' \pm \varphi)}{\sin \varphi'},$$

je nachdem $\varphi'' < 90^\circ$ oder $\varphi'' > 90^\circ$ ist, so haben wir

$$(2) \quad J_I = 1 - \frac{1}{\pi (1 + \kappa^2 \lambda)} \{ \varphi + \kappa^2 (\pi - \varphi') - \varrho' \sin \varphi \}.$$

φ und φ'' bestimmen sich aus

$$(3) \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{1 + \varrho'^2 - \kappa^2}{2 \varrho'} \\ \sin \varphi = \kappa \sin \varphi''. \end{cases}$$

Setzen wir weiter zur Abkürzung

$$(4) \quad M_I = (1 + \kappa^2 \lambda) \pi (1 - J_I),$$

dann wird

$$(5) \quad M_I = \varphi + \kappa^2 \varphi'' - \varrho' \sin \varphi$$

oder

$$(5a) \quad M_I = \varphi + \kappa^2 \varphi'' - \kappa \sin(\varphi'' + \varphi).$$

Es wird für die späteren Rechnungen dienlich sein, die Gleichung (5) nur für $\varphi'' < \frac{\pi}{2}$ zu benützen und wenn $\varphi'' > \frac{\pi}{2}$ ist, eine andere Hilfsgrösse H_I einzuführen, die durch

$$(6) \quad H_I = \kappa^2 \pi - \pi (1 + \kappa^2 \lambda) (1 - J_I)$$

definiert wird. Folglich ist

$$(7) \quad H_I = \kappa^2 \varphi' - \varphi - \varrho' \sin \varphi$$

oder

$$(7a) \quad H_I = \kappa^2 \varphi' - \varphi + \kappa \sin(\varphi' - \varphi),$$

da

$$\varrho' = \frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\sin \varphi'}$$

ist. Diese Gleichungen gelten natürlich bloss für das erste Minimum.

Wir finden aber in ganz ähnlicher Weise für das zweite Minimum

$$(8) \quad J_{II} = 1 - \frac{\lambda}{\pi(1 + \kappa^2 \lambda)} \{ \varphi + \kappa^2 (\pi - \varphi') - \varrho' \sin \varphi \}$$

$$(9) \quad M_{II} = \pi \frac{1 + \kappa^2 \lambda}{\lambda} (1 - J_{II})$$

$$(9a) \quad M_{II} = \varphi + \kappa^2 \varphi'' - \varrho' \sin \varphi$$

$$(10) \quad H_{II} = \kappa^2 \pi - \pi \frac{1 + \kappa^2 \lambda}{\lambda} (1 - J_{II})$$

$$(10a) \quad H_{II} = \kappa^2 \varphi' - \varphi + \varrho' \sin \varphi.$$

Die übrigen Formeln gelten gemeinsam für die beiden Minima.

Es erübrigt jetzt den Zusammenhang zwischen J_I , J_I einerseits und J_{II} , J_{II} anderseits zu ermitteln. Dies geschieht folgendermaassen:

Wir nehmen an, die Neigung sei $\frac{\pi}{2}$. Schneiden wir, um die die jeweilige, leuchtende Oberfläche darstellende Ellipse zu erhalten, das Ellipsoid, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{R'^2} + \frac{y^2 + z^2}{R^2} = 1$$

ist, durch eine Ebene, deren Normal mit den x -, y - und z -Coordinatenachsen des § 3, die Winkel β , $\frac{\pi}{2} + \beta$ und $\frac{\pi}{2}$ bildet, so finden wir für die Gleichung der Projection der darstellenden Ellipse auf die yz -Ebene

$$y^2 \left\{ \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{R'^2} + \frac{1}{R^2} \right\} + \frac{z^2}{R^2} = 1.$$

Die grosse Halbaxe dieser Projection ist daher

$$\frac{R R'}{\sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2 \beta + R'^2}}$$

und folglich ist

$$(11) \quad R_t = \frac{R R'}{\sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2 \beta + R'^2}}.$$

Da die Neigung gleich $\frac{\pi}{2}$ gesetzt wurde, bleibt die kleine Halbaxe des Durchschnitte constant gleich R . Wir wollen jetzt

$$(12) \quad f = \frac{\pi R_t R}{\pi R' R} = \frac{R_t}{R'} = \frac{B_t}{B'} [(11) \text{ § 3}] = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \beta + q^2 \cos^2 \beta}}$$

setzen. β bedeutet hier die Länge in der wahren Bahn von Min. I aus gezählt und ist, da wir vorläufig auf die Excentricität verzichten, gleich μ . Die Gleichung (12)

stimmt, wie zu erwarten ist, mit (12) § 3 überein, wenn man $\beta = \varphi - \frac{\pi}{2}$ setzt und mit dem Maximum vergleicht, d. h. mit $\left(\frac{R}{R'}\right)$ multiplicirt.

Bezeichnet nun

L_i die Helligkeit der Summe der beiden momentanen Ellipsen,

L_m den maximalen Werth von L_i ,

L_t die jeweilige Helligkeit während des ersten Minimums,

so können wir

$$\frac{L_i}{L_m} = \frac{\pi R'_t R + \pi \lambda B'_t B}{\pi R' R + \pi \lambda B' B} = \frac{R'_t}{R'} = f$$

und

$$J_I = \frac{L_t}{L_m} = \frac{L_t}{L_i} \times \frac{L_i}{L_m} = f \frac{L_t}{L_i}$$

schreiben. Da aber

$$J_I = \frac{L_t}{L_i}$$

ist, so haben wir

$$(13) \quad J_I = f J_I$$

und in ähnlicher Weise

$$(14) \quad J_{II} = f J_{II}.$$

Ferner gilt die Beziehung

$$(15) \quad \varrho' = \frac{\varrho}{R'_t} = \frac{\varrho}{f},$$

die später benutzt werden wird.

Setzen wir nun eine Kreisbahn voraus und bezeichnet $\beta + \frac{\pi}{2}$ die wahre Anomalie in der wahren Bahn, α die Länge in der scheinbaren Bahn, die beiden vom Knoten aus gezählt, ϱ und r den Radiusvector der scheinbaren resp. wahren Bahn, dann folgt augenblicklich

$$\varrho \cos \alpha = r \sin \beta$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos i \cot \beta;$$

folglich ist

$$(16) \quad \varrho^2 = r^2 \sin^2 \beta + r^2 \cos^2 i \cos^2 \beta.$$

Um die Gleichungen (5a), (7a), (9a), (10a) für gegebene Werthe von M_I , H_I , M_{II} , H_{II} nach φ aufzulösen, bediene man sich, wie Dr. Harting¹⁾ es thut, der folgenden Differentialrelationen.

1) Siehe „Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes β Persei“.

Aus (5a) geht hervor, dass

$$\frac{\delta M_I}{\delta \varphi} = 1 + \kappa^2 \frac{\delta \varphi''}{\delta \varphi} - \kappa \cos(\varphi'' + \varphi) \left(1 - \frac{\delta \varphi''}{\delta \varphi}\right)$$

ist. Aus (1) und (3) findet man, dass

$$\frac{\delta \varphi''}{\delta \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\kappa \cos \varphi''}$$

ist und folglich ist

$$(17) \quad \delta \varphi = \frac{\delta M_I}{2 \kappa \operatorname{tg} \varphi'' \sin(\varphi'' + \varphi)}$$

und ganz in derselben Weise findet man, dass

$$(18) \quad \delta \varphi = \frac{\delta H_I}{2 \kappa \operatorname{tg} \varphi' \sin(\varphi' - \varphi)}$$

ist. Wenn aber $\kappa > 1$ ist, wie es, wie später gezeigt werden wird, bei β Lyrae der Fall ist, werden die letzten obigen Gleichungen zu

$$(5b) \quad M_I = \varphi + \kappa^2 \varphi' - \kappa \sin(\varphi + \varphi')$$

$$(7b) \quad H_I = \varphi - \kappa^2 \varphi' + \kappa \sin(\varphi - \varphi')$$

$$\varphi' = \frac{\kappa \sin(\varphi - \varphi')}{\sin \varphi}$$

$$(19) \quad \delta \varphi = \frac{\delta H_I}{2 \kappa \operatorname{tg} \varphi' \sin(\varphi - \varphi')}.$$

Diese Gleichungen gelten für die beiden Minima ohne Modification.

Sobald man κ und angenäherte Werthe von φ hat, kann man dieselben durch (17)–(19) leicht corrigiren. Um approximative Werthe von φ zu bekommen, verfährt man am zweckmässigsten folgendermaassen: Man bringe M_I , H_I etc. mit dem Argumente φ in eine Tafel, die in geeigneten Intervallen fortschreitet.

Diese Tafel soll die Werthe von φ , von 0° bis $\varphi = \arcsin \kappa$, wenn $\kappa < 1$ oder bis $\varphi = \arcsin \frac{1}{\kappa}$, wenn $\kappa > 1$ ist, einschliessen. Von dieser Tafel lese man, wenn man den Werth von M_I , H_I etc. hat, den zugehörigen Werth von φ ab, der dann vermittelt (17)–(19) corrigirt werden kann.

Ein Muster der fünf Tafeln, die construiert wurden, um die obigen Gleichungen für fünf verschiedene Werthe durchrechnen zu können, befindet sich im folgenden Paragraphen. Die angegebene Tafel wurde für $\kappa = 0.9049$ berechnet, und da das φ sich sehr rasch in der Nähe von $\varphi = \arcsin \kappa$ ändert, wurden daselbst etwas engere Intervalle für φ genommen.

Die abgeleiteten Formeln ermöglichen es jetzt, sowohl eine Kreisbahn aus der Lichtcurve, als eine Lichtcurve aus den Elementen einer solchen Kreisbahn zu berechnen. Die erste Aufgabe wird folgendermaassen gelöst:

Aus der Periode von β Lyrae bestimmt sich die Winkelbewegung (μ) zu 1^o162 pro Stunde.

Wir haben

$$\beta = \mu t \quad (t \text{ in Stunden von Min. I aus gezählt}).$$

f findet man, da $q = 1.2$ ist, aus (12).

J_I und J_{II} liest man in Stufen direct von der Curve ab und verwandelt sie in Helligkeitsverhältnisse.

Aus (13) und (14) berechnet man dann J'_I und J'_{II} und aus (4), (6), (9) und (10) findet man M_I , H_I etc., so bald die Werthe von κ und λ bekannt werden. Durch das bereits erklärte Verfahren bestimmt man φ ; ϱ' bestimmt sich aus

$$\varrho' = \frac{\kappa \sin(\varphi' \pm \varphi)}{\sin \varphi},$$

je nachdem man M oder H zu Hülfe nimmt, und ϱ aus

$$\varrho = f \varrho'.$$

Diese Durchrechnung der Gleichungen kann für beliebig viele Zeitpunkte geschehen. Dann hätten wir eine Reihe von ϱ -Werthen, die mit den zugehörigen Werthen von β in

$$(20) \quad \varrho^2 = x \sin^2 \beta + y \cos^2 \beta$$

substituirt, wo $x = r^2$ und $y = r^2 \cos^2 i$ ist, vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von r und $\cos i$ liefern würden, dadurch dass wir

$$(21) \quad \begin{cases} r = \sqrt{x} \\ \cos i = \sqrt{\frac{y}{x}} \end{cases}$$

setzen. Wenn die beiden Scheiben zu den Zeiten der Minima sich berühren, so können wir in (16)

$$\cos i = \frac{1 - \kappa}{r}$$

setzen und werden folglich

$$(22) \quad r = \frac{\sqrt{\varrho^2 - (1 - \kappa)^2 \cos^2 \beta}}{\sin \beta}$$

erhalten. Wäre dagegen der Werth ϱ_0 von ϱ zur Zeit des Minimums bekannt, so könnten wir

$$\cos i = \frac{\varrho_0}{r}$$

setzen, woraus sich

$$(23) \quad r = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \varrho_0^2 \cos^2 \beta}}{\sin \beta}$$

ergibt.

Nehmen wir schliesslich an, dass $i = \frac{\pi}{2}$ ist; dann haben wir einfach

$$(24) \quad \varrho = r \sin \beta.$$

Sobald daher ϱ bekannt ist, finden wir durch (20)–(24) in jedem möglichen Falle die Werthe der Kreisbahnelemente.

§ 5.

Ueber die angenäherten Werthe der Neigung der Bahn und des Verhältnisses der beiden Halbmesser.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Excentricität der Bahn gleich Null ist. Dann wird $\alpha = \alpha'$ in § 1.

Bezeichne κ das Verhältniss des Halbmessers des dunkleren zu demjenigen des helleren, und λ das Verhältniss der Helligkeit des dunkleren zu der des helleren Körpers.

Vermittelst der der „Uran. Oxon.“ entnommenen Grössen der Vergleichssterne Argelanders bekam ich für die Verhältnisse der Helligkeiten zu den Hauptepochen folgende Werthe:

$$\frac{\text{Helligkeit zur Zeit des II. Min.}}{\text{Helligkeit zur Zeit des I. Min.}} = 1.8536 = c.$$

$$\frac{\text{Helligkeit zur Zeit des Max.}}{\text{Helligkeit zur Zeit des I. Min.}} = 2.9123 = m.$$

Nehmen wir an, dass das I. Min. dadurch erzeugt wird, dass der dunklere Körper sich zur Zeit dieses Minimums zwischen dem Auge des Beobachters und dem helleren Körper befindet und dass das II. Min. dadurch entsteht, dass der hellere sich zur Zeit des II. Min. zwischen dem Auge und dem dunkleren Körper hindurch bewegt, so haben wir

$$(1) \quad \frac{1 + \kappa^2 \lambda - \alpha \kappa^2 \lambda}{1 - \alpha \kappa^2 + \kappa^2 \lambda} = c$$

und

$$(2) \quad \frac{\pi R R' + \pi \lambda B B'}{\pi R^2 - \pi \alpha B^2 + \pi \lambda B^2} = q \cdot \frac{1 + \kappa^2 \lambda}{1 - \alpha \kappa^2 + \kappa^2 \lambda} = m,$$

wo R' , R , B' , B und q ihre frühere Bedeutung haben.

Aus (1) und (2) ergeben sich

$$(3) \quad \frac{\alpha \kappa^2 \lambda}{1 + \kappa^2 \lambda} = \frac{m - c q}{m}$$

und

$$(4) \quad \frac{\alpha \kappa^2}{1 + \kappa^2 \lambda} = \frac{m - q}{m}$$

und daraus

$$(5) \quad \lambda = \frac{m - c q}{m - q}.$$

Aus (3) und (1) findet man dann, dass

$$(6) \quad \frac{1}{\kappa^2} = \frac{m}{m - q} \alpha - \frac{m - c q}{m - q}$$

ist. Nun ist nach (4)

$$m - q = m \frac{\alpha \kappa^2}{1 + \kappa^2 \lambda}.$$

Da aber $\alpha \kappa^2$ und $1 + \kappa^2 \lambda$ positive Grössen sind, so muss $m > q$ sein. Folglich ist

$$\frac{d \left(\frac{1}{\kappa^2} \right)}{d \alpha} = \frac{m}{m - q},$$

letzteres daher eine positive Grösse.

$\left(\frac{1}{\kappa^2} \right)$ und α nehmen desshalb miteinander ab und zu, folglich entspricht der Maximalwerth von α dem Maximalwerth von $\frac{1}{\kappa^2}$.

Wenn nun

$$\kappa^2 \leq 1 \text{ ist, ist } \alpha \leq 1.$$

Aus (6) folgt also, dass

$$\frac{1}{\kappa^2} \leq \frac{c q}{m - q} \quad \text{oder} \quad \kappa^2 \geq \frac{m - q}{c q}$$

ist. Wenn jedoch

$$\kappa^2 \geq 1 \text{ ist, ist } \alpha \leq \frac{1}{\kappa^2}$$

und nach (6) ist mithin

$$\frac{1}{\kappa^2} \leq \frac{m}{m - q} \frac{1}{\kappa^2} - \frac{m - c q}{m - q},$$

folglich ist auch

$$\kappa^2 \leq \frac{q}{m - c q}.$$

Fassen wir die beiden Fälle zusammen, so haben wir

$$(7) \quad \frac{m - q}{c q} \leq \kappa^2 \leq \frac{q}{m - c q}.$$

Hieraus folgt, dass

$$\frac{m - q}{c q} \leq \frac{q}{m - c q}$$

also

$$q \geq \frac{m}{c+1}$$

ist. Setzen wir die aus der Curve abgeleiteten Werthe von m und c ein, so bekommen wir

$$q \geq 1.0205.$$

Wir sehen von Neuem, dass die Annahme einer Abplattung der Körper nicht zu umgehen ist.

Setzen wir

$$K^2 = \frac{q}{m - cq} \quad \text{und} \quad K_0^2 = \frac{m - q}{cq},$$

so sind nach (7) K^2 und K_0^2 die Grenzen der Function κ^2 .

Differenziren wir nun K^2 und K_0^2 nach q , so erhalten wir

$$(9) \quad \begin{cases} \delta(K^2) = + \frac{m}{(m - cq)^2} & \text{d. h. = einer wesentlich positiven Grösse.} \\ \delta(K_0^2) = - \frac{m}{cq^2} & \text{d. h. = " " negativen " } \end{cases}$$

Da nun nach (9) mit zunehmendem q die untere Grenze von κ^2 abnimmt, während die obere zunimmt, so erscheint es, um sicher zu sein, dass der richtige Werth von κ^2 innerhalb der betrachteten Grenzen liegt, rathsam, einen etwas grösseren als den aus den früheren Rechnungen hervorgehenden Werth von q zu wählen. In Folge dessen habe ich $q = 1.275$ statt 1.2 gesetzt und aus (8) ergab sich dann

$$0.6928 \leq \kappa^2 \leq 2.3228$$

oder was dasselbe ist

$$0.8323 \leq \kappa \leq 1.5241.$$

Ich brauche daher bloss diejenigen Werthe von κ zu untersuchen, die zwischen 0.8323 und 1.5241 liegen.

Aus (5) geht nun hervor, dass, was auch die numerischen Werthe von κ und α sein mögen,

$$\lambda = 0.3353$$

ist. Vermittelst der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen habe ich ϱ , das heisst den Radiusvector der scheinbaren Bahn für die folgenden fünf Werthe von κ , nämlich

$$0.8323, \quad 0.9049, \quad 1.0000, \quad 1.2883 \quad \text{und} \quad 1.5241$$

berechnet.

Aus jedem dieser Werthe von κ wurden die zugehörigen Werthe von M_I und H_I und zwar von 6^h zu 6^h für 42 Stunden vor und nach dem I. Min. berechnet. Diese

M_I und H_I sind in der folgenden Tafel mitgetheilt. Die in der 2. und 3. Reihe stehenden Zahlenwerthe entsprechen $\kappa = 0.8323$, in der 4. und 5. Reihe aber stehen die $\kappa = 0.9049$ entsprechenden M_I und H_I und so weiter. Weiterer Erklärung bedarf diese Tafel nicht.

Zahlenwerthe für M_I und H_I .

t	M_I	H_I	M_I	H_I	M_I	H_I	M_I	H_I	M_I	H_I
42	0.0328	2.1437	0.0340	2.5394	0.0356	3.1060	0.0415	3.1001	0.0474	3.0942
36	0.0993	2.0772	0.1027	2.4707	0.1076	3.0340	0.1255	3.0161	0.1434	2.9982
30	0.4144	1.7621	0.4286	2.1448	0.4490	2.6926	0.5234	2.6182	0.5982	2.5434
24	0.8934	1.2831	0.9241	1.6493	0.9681	2.1735	1.1284	2.0132	1.2896	1.8520
18	1.5629	0.6136	1.6166	0.9568	1.6935	1.4481	1.9740	1.1676	2.2560	0.8856
12	2.0043	0.1722	2.0731	0.5003	2.1718	0.9698	2.5315	0.6101	2.8931	0.2485
6	2.1527	0.0237	2.2266	0.3468	2.3326	0.8090	2.7190	0.4226	3.1074	0.0342
0	2.1765	0	2.2512	0.3222	2.3584	0.7832	2.7490	0.3926	3.1416	0

Um die Gleichungen (5a) und (7a) § 4 nach φ für diese M_I und H_I auflösen zu können, habe ich für jedes κ eine Tafel vermittelt dieser Gleichungen für das Argument φ oder φ' , je nachdem $\kappa < 1$ oder $\kappa > 1$ ist, construirt, aus der man für bekannte M_I und H_I angenäherte Werthe von φ oder φ' finden kann. Ich habe bloss eine dieser Tafeln beigefügt, diejenige nämlich, die für $\kappa = 1.5241$ gilt, d. h. für den Werth von κ , der sich in den weiteren Untersuchungen als der beste unter den fünf betrachteten Werthen von κ herausstellen wird. Die anderen vier Tafeln zeigten keine besonderen Eigenthümlichkeiten und diese eine genügt somit als Beispiel des eingeschlagenen Verfahrens. Für $\kappa > 1$ benützte ich natürlich bei H_I die Formel (7b) statt (7a) § 4.

φ'	M	H	φ'	M	H
0°	0	0	29°	0.5244	0.1427
8°	0.0101	0.0017	32°	0.7174	0.2104
11°	0.0277	0.0060	35°	0.9683	0.3146
14°	0.0572	0.0126	37°	1.1791	0.4119
17°	0.1027	0.0232	39°	1.4574	0.5677
20°	0.1688	0.0392	40°	1.6499	0.6943
23°	0.2535	0.0625	40° 30'	1.7745	0.8019
26°	0.3734	0.0957	41° 0'3	2.0848	1.0567

Die Auflösung der Gleichungen für die fünf Werthe von κ lieferte die Grössen ϱ und φ , wie sie in der folgenden Tafel stehen:

t	$\kappa = 0.8323$		$\kappa = 0.9049$		$\kappa = 1$		$\kappa = 1.2883$		$\kappa = 1.5241$	
	φ	ϱ	φ	ϱ	φ	ϱ	φ	ϱ	φ	ϱ
42	16° 11'	1.5471	16° 39'	1.6109	17° 13'	1.6942	18° 55'	1.5095	20° 18'	1.4093
36	23° 30'	1.4194	24° 12'	1.4808	25° 5'	1.5605	27° 39'	1.3959	29° 44'	1.3056
30	38° 8'	1.1280	29° 32'	1.1865	41° 16'	1.2610	46° 12'	1.1457	50° 8'	1.0776
24	49° 12'	0.6713	51° 45'	0.8761	54° 45'	0.9462	62° 53'	0.8826	69° 20'	0.8368
18	56° 17'	0.4687	62° 12'	0.5286	68° 15'	0.5963	83° 46'	0.5794	84° 50'	0.5613
12	49° 34'	0.2475	64° 47'	0.3199	75° 49'	0.3895	80° 26'	0.4081	56° 46'	0.3784
6	30° 12'	0.1582	63° 40'	0.2504	78° 15'	0.3204	72° 34'	0.3464	30° 3'	0.2962
0	0	—	63° 18'	0.2390	78° 38'	0.3092	71° 5'	0.3351	0	—

Für die zweite, dritte und vierte Hypothese sind die ϱ -Werthe für $t = 0$, folglich auch die Neigung der Bahn bestimmt. Wir müssen also, um r zu berechnen, die Gleichung (22) § 4 für diese drei Fälle benützen. Für die erste und fünfte Hypothese dagegen können die Zahlenwerthe von ϱ irgendwo zwischen 0 und $1 - \kappa$ bzw. $1 - \frac{1}{\kappa}$ liegen, je nachdem $\kappa < 1$ oder $\kappa > 1$ ist. Folglich müssen wir zuerst die Gleichungen (22) § 4, darauf (23) § 4, die sich bloss auf die Grenzfälle beziehen, zu Hülfe nehmen. Schliesslich müssen wir, da es möglich ist, dass die kleinere Scheibe ganz auf die grössere projicirt wird, ohne dass die beiden Scheiben sich überhaupt berühren, die Gleichung (19) § 4, die innerhalb der Grenzen anwendbar ist, benützen. Die Resultate der Gleichungen (21) und (23) § 4 sind in der nachstehenden Tafel mitgetheilt. Die Striche über r beziehen sich auf die betreffende Hypothese für κ .

r'		r''	r'''	r''''	r'''''	
$\cos i = \frac{1 - \kappa}{r}$	$i = \frac{\pi}{2}$				$\cos i = \frac{1 - \kappa}{r}$	$i = \frac{\pi}{2}$
2.0509	2.0562	2.1307	2.2353	1.9790	1.8487	1.8730
2.1208	2.1281	2.2041	2.3140	2.0592	1.9770	1.9574
1.9590	1.9737	2.0476	2.1613	1.9461	1.8198	1.8851
1.3837	1.4361	1.8190	1.9376	1.7786	1.6674	1.7901
1.2374	1.3122	1.3736	1.4614	1.3658	2.1596	1.5723
0.7902	1.0286	0.9148	1.0320	1.0246	0.9332	1.5726
imag.	1.3025	0.6596	0.7930	0.7983	imag.	2.2000

Der richtige Werth von κ müsste natürlich innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler gleiche Werthe von r ergeben. Die Auflösungen für die erste und letzte Hypothese nach der Methode der kleinsten Quadrate lieferten in beiden Fällen für das y der Gleichung (20) § 4 einen negativen und mithin für $\cos i$ einen imaginären Werth.

Zieht man übrigens in Betracht, dass die Auflösung des ersten Falles nach der Methode der kleinsten Quadrate einen numerisch grossen imaginären Werth für $\cos i$ liefert und ferner, dass von einer annähernden Gleichheit der in den ersten fünf Spalten enthaltenen Werthe von r keine Rede sein kann, so muss man schliessen, dass mit den ersten fünf Werthen von κ gar nichts anzufangen ist. Die Auflösung des letzten Falles liefert dagegen in der That einen imaginären Werth von $\cos i$, jedoch ist derselbe numerisch sehr klein. Diese Erwägungen führten mich zu dem Schluss, dass die Neigung fast genau 90° beträgt und dass unter den 5 Werthen der letzte, nämlich $\kappa = 1.5241$, als der beste anzusehen ist. Der Halbmesser des dunkleren Körpers wurde jetzt zur Einheit gewählt und dementsprechend wurden die nöthigen Modificationen in den früheren Formeln vorgenommen. Diese abgeänderten Formeln werden erst später angegeben werden.

Da die Werthe von r in der letzten Reihe der Tafel aus

$$r = \frac{\varrho}{\sin \beta}$$

abgeleitet wurden, so sieht man, dass wenn β klein ist, irgend ein kleiner Fehler in ϱ stark vergrössert in r übergeht. Desshalb habe ich für r das Mittel mit Gewichten aus der letzten Reihe genommen, indem ich jedem Werthe von r ein Gewicht gleich dem zugehörigen $\sin \beta$ zugeschrieben habe. Dann erhalte ich

$$r = \frac{r_1 \sin \beta_1 + r_2 \sin \beta_2 + \dots}{\sin \beta_1 + \sin \beta_2 + \dots} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \dots}{\sin \beta_1 + \sin \beta_2 + \dots} = 1.8344.$$

Vermittelst dieses Werthes von r und $\kappa = \frac{1}{1.5421} = 0.6561$, $\lambda = 0.3353$ und $i = \frac{\pi}{2}$ wurde eine Lichtcurve berechnet, deren Werthe von J_I und J_{II} sammt ihren Abweichungen von der mittleren Curve in einer Tafel im nächsten Paragraphen mitgetheilt sind, nachdem die abgeänderten Formeln zusammengestellt und die Differentialgleichungen zur Verbesserung angenäherter Werthe von r , κ und $i' = \frac{\pi}{2} - i$ abgeleitet worden sind. Ich mache hier darauf aufmerksam, dass κ das Verhältniss des Halbmessers des helleren zu demjenigen des dunkleren Körpers bedeutet.

§ 6.

Ableitung und Anwendung der Differentialformeln zur Verbesserung angenäherter Kreisbahnelemente.

In diesem Paragraphen stelle ich vor Allem die abgeänderten Formeln zusammen, wie sie in den späteren Rechnungen gebraucht werden. Dann leite ich die Differentialgleichungen ab, deren man sich zur Verbesserung von r , κ und i bedienen kann, gehe hierauf zur Verbesserung der schon gefundenen Werthe dieser Grössen über und berechne endlich mittelst dieser Gleichungen eine Lichtcurve mit den corrigirten Werthen.

Die abgeänderten Formeln lauten folgendermaassen:

$$(1) \quad \varrho = r \sin \beta$$

$$(2) \quad \beta = \frac{15^\circ}{P} \quad (t \text{ in Stunden vom I. Min. aus gezählt})$$

$$(3) \quad f = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \beta + \kappa^2 \cos^2 \beta}}$$

$$(4) \quad \varrho' = \frac{1}{f} \varrho$$

$$(5) \quad \cos \varphi = \frac{\kappa^2 + \varrho'^2 - 1}{2 \kappa \varrho'}$$

$$(6) \quad \sin \varphi' = \kappa \sin \varphi$$

$$(7) \quad M = \varphi' + \kappa^2 \varphi - \kappa (\varphi + \varphi') = \varphi' + \kappa^2 \varphi - \varrho' \sin \varphi'$$

$$(8) \quad J_I = 1 - \frac{M}{\pi (\kappa^2 + \lambda)}$$

$$(9) \quad J_{II} = 1 - \frac{\lambda M}{\pi (\kappa^2 + \lambda)}$$

$$(10) \quad J_I = f J'_I$$

$$(11) \quad J_{II} = f J'_{II}.$$

Wenn man eine kleine Abweichung der Neigung von 90° in Betracht ziehen will, so benütze man statt (1)

$$\varrho = r \sqrt{\sin^2 \beta + i'^2 \cos^2 \beta},$$

wobei i' die erwähnte Abweichung bedeutet.

Aus (1) und (2) § 5 werden dann

$$(12) \quad \frac{\lambda + \kappa^2 - \lambda \kappa^2}{\lambda} = c = 1.8536$$

und

$$(13) \quad q \left(\frac{\lambda + \kappa^2}{\lambda} \right) = m = 2.9123.$$

Aus (4) und (9) § 4 werden

$$(14) \quad M_I = \pi (\lambda + \kappa^2) (1 - J_I)$$

und

$$(15) \quad M_{II} = \frac{\pi (\lambda + \kappa^2)}{\lambda} (1 - J_{II}).$$

Aus dieser Gruppe von Gleichungen leite ich die Differentialformeln ab.

Differenziert man (12), so wird

$$(a) \quad \delta \left(\frac{\kappa^2}{\lambda} \right) = \delta(\kappa^2),$$

also

$$(b) \quad \delta \lambda = \frac{\lambda(1-\lambda)}{\kappa^2} \delta(\kappa^2).$$

Durch Differenzierung findet man aus (13)

$$(c) \quad \delta q = -\frac{q^2}{m} \delta(\kappa^2),$$

aus (14)

$$(d) \quad \delta M_I = \pi(1 - J_I) [\delta(\kappa^2) + \delta \lambda] - \pi(\lambda + \kappa^2) \delta J_I,$$

aus (7)

$$\delta M_I = \varphi \delta \kappa^2 + \kappa^2 \delta \varphi - \sin \varphi' \delta \varrho' + (1 - \varrho' \cos \varphi') \delta \varphi',$$

aus (5)

$$\delta \varphi = \left\{ \frac{\cos \varphi'}{\varrho' \sin \varphi' \cos \varphi} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\kappa} \right\} \delta \kappa - \frac{\cos \varphi'}{\varrho' \sin \varphi'} \delta \varrho',$$

aus

$$\cos \varphi' = \frac{\varrho'^2 - \kappa^2 + 1}{2\varrho'}$$

$$\delta \varphi' = \frac{\kappa \delta \kappa}{\varrho' \sin \varphi'} - \frac{\kappa \cos \varphi}{\varrho' \sin \varphi'} \delta \varrho'.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \delta M_I = & \left\{ 2\kappa \varphi - \kappa \operatorname{tg} \varphi + \frac{\kappa}{\varrho' \sin \varphi'} \left(\frac{\kappa \cos \varphi'}{\cos \varphi} + 1 - \varrho' \cos \varphi' \right) \right\} \delta \kappa^2 \\ & - \left\{ \sin \varphi' + \frac{\kappa \cos \varphi}{\varrho' \sin \varphi'} \left(\frac{\kappa \cos \varphi'}{\cos \varphi} + 1 - \varrho' \cos \varphi' \right) \right\} \delta \varrho', \end{aligned}$$

oder nach einigen einfachen Reductionen

$$(e) \quad \delta M_I = \varphi \delta(\kappa^2) - 2 \sin \varphi' \delta \varrho'.$$

Nach (d) und (e) bekommen wir also

$$(f) \quad \pi(\lambda + \kappa^2) \delta J_I = [\pi(1 - J_I) - \varphi] \delta(\kappa^2) + \pi(1 - J_I) \delta \lambda + 2 \sin \varphi' \delta \varrho'.$$

Man findet übrigens durch Differenzierung von (10)

$$\delta J_I = \frac{1}{f} \delta J_I + J_I \delta \left(\frac{1}{f} \right)$$

und von (3)

$$(g) \quad \delta \left(\frac{1}{f} \right) = q \frac{\cos^2 \beta \delta q}{\sqrt{\sin^2 \beta + q^2 \cos^2 \beta}} = -\frac{f q^3 \cos^2 \beta \delta(\kappa^2)}{m}$$

der Gleichung (c) zufolge.

Also ist

$$(h) \quad \delta J_I = \frac{1}{f} \delta J_I - \frac{J_I f q^3 \cos^2 \beta \delta(\kappa^2)}{m}.$$

Aus (4) und (g) findet man ganz in derselben Weise, dass

$$(i) \quad \delta \varrho' = \frac{1}{f} \delta \varrho - \frac{\varrho f q^3 \cos^2 \beta}{m} \delta(\kappa^2)$$

ist. (b), (g), (h) und (i) in (f) substituirt, ergeben

$$(j) \quad \pi(\lambda + \kappa^2) \delta J_I = 2\kappa K_I \delta \kappa + 2 \sin \varphi' \delta \varrho,$$

wo

$$K_I = A J_I f^2 \cos^2 \beta + B(f - J_I) - f \varphi - C \varrho f^2 \cos^2 \beta \sin \varphi',$$

$$A = \pi q \lambda, \quad B = \pi \left(1 + \frac{\lambda(1-\lambda)}{\kappa^2} \right) \quad \text{und} \quad C = \frac{2q^3}{m}$$

ist. Aus (16) § 4 folgt durch Differenzirung

$$\delta \varrho = \frac{\varrho}{r} \delta r - \frac{r^2}{2} \frac{\sin 2i \cos^2 \beta}{\varrho} \delta i.$$

Setzen wir nun $i' = \frac{\pi}{2} - i$; dann wird, da $\delta i = -\delta i'$ ist,

$$\delta \varrho = \frac{\varrho}{r} \delta r + \frac{r^2}{2} \frac{\cos^2 \beta}{\varrho} \delta(i'^2).$$

Setzt man diesen Werth von $\delta \varrho$ in (j) ein, so erhält man

$$(I)^1 \quad \pi(\lambda + \kappa^2) \delta J_I = 2\kappa K_I \delta \kappa + \frac{2\varrho \sin \varphi'}{r} \delta r + \frac{r^2 \cos^2 \beta \sin \varphi'}{\varrho} \delta(i'^2),$$

welche Gleichung ihre Gültigkeit natürlich bloss während der das erste Minimum erzeugenden Verfinsterung behält.

Für das II. Minimum muss man Gleichung (9) statt (8) differenziren, und da in sonstiger Beziehung überhaupt keine Abänderungen an dem eben durchgeführten Verfahren vorgenommen werden müssen, so können wir die entsprechende Gleichung für das II. Minimum ohne Weiteres hinschreiben, nämlich:

$$(II) \quad \frac{\pi(\lambda + \kappa^2)}{\lambda} \delta J_I = 2\kappa K_{II} \delta \kappa + \frac{2\varrho \sin \varphi'}{r} \delta r + \frac{r^2 \cos^2 \beta \sin \varphi'}{\varrho} \delta(i'^2),$$

wo

$$K_{II} = \frac{A J_{II} f^2 \cos^2 \beta}{\lambda} + \pi(f - J_{II}) - C \varrho f^2 \cos^2 \beta \sin \varphi'$$

ist.

1) Es wäre natürlich richtiger gewesen, wenn man statt der Lichtverhältnisse selbst die Logarithmen derselben ausgeglichen hätte. Diese Untersuchungen können jedoch des provisorischen Charakters des vorliegenden Materials wegen selbstverständlich keinen besonders grossen Anspruch auf Genauigkeit erheben. Aus demselben Grunde haben sie natürlich keinen abschliessenden Charakter, dienen vielmehr der Hauptsache nach zur Orientirung. Mit Rücksicht auf diesen Umstand habe ich mir erlaubt, im Folgenden die Lichtverhältnisse selbst auszugleichen, da die Rechnungen dadurch an Uebersichtlichkeit wesentlich gewinnen.

Vermittelst (I) und (II) kann man die angenäherten Elemente corrigiren, nachdem man mittelst derselben eine Lichtcurve berechnet hat. Ich bemerke, dass das $\delta(i'^2)$ enthaltende Glied es ermöglicht, eine in i etwa vorhandene Abweichung von 90° direct festzustellen, vorausgesetzt, dass diese Abweichung als eine Differentialgrösse betrachtet werden kann.

Vermittelst der Werthe $r = 1.8344$, $\kappa = 0.6561$, $\lambda = 0.3353$ und $i = \frac{\pi}{2}$, die am Schlusse des § 5 gegeben wurden, berechne ich eine Lichtcurve und theile nun J_R , die berechneten Helligkeitswerthe, sowie J_B , die direct aus der mittleren Arge-lander'schen Curve abgeleiteten Werthe und endlich δJ_{B-R} , die jeweiligen Unterschiede derselben in der nachstehenden Tafel mit. Die zweite, dritte und vierte Spalte enthält die Werthe für das I. Minimum, die fünfte, sechste und siebente die Werthe für das II. Minimum. In der ersten Spalte befinden sich die zugehörigen Zeiten.

t	J_R	J_B	δJ_{B-R}	J_R	J_B	δJ_{B-R}
42	0.8732	0.8794	+ 0.0062	0.8823	0.9123	+ 0.0300
36	0.8140	0.8306	+ 0.0166	0.8455	0.8804	+ 0.0349
30	0.7366	0.7465	+ 0.0099	0.8046	0.8400	+ 0.0354
24	0.6410	0.6193	— 0.0217	0.7596	0.7907	+ 0.0311
18	0.5303	0.4821	— 0.0482	0.7124	0.7293	+ 0.0099
12	0.4138	0.3821	— 0.0317	0.6659	0.6719	+ 0.0060
6	0.3445	0.3492	+ 0.0047	0.6383	0.6452	+ 0.0069
0	0.3433	0.3433	0	0.6365	0.6365	0

Nachdem diese Zahlenwerthe in (I) und (II) substituirt und die Coëfficienten berechnet worden waren, erhielt ich 14 Bedingungsgleichungen, die, nachdem $\gamma \delta(i'^2)$ statt $\delta(i'^2)$, wo $\gamma = 4.4005$ ist, der Homogenität wegen als dritte Unbekannte eingeführt wurde, wie folgt lauteten:

$$\begin{array}{rclcl}
 7.6163 \delta \kappa + 9.6175 \delta r + 8.8208 \gamma \delta(i'^2) & = & 8.1737 \\
 9.8095 & + & 9.6175 & + & 8.8208 & = & 9.3330 \\
 8.7356 & + & 9.7413 & + & 9.1565 & = & 8.6014 \\
 9.7928 & + & 9.7413 & + & 9.1565 & = & 9.3987 \\
 8.5667 & + & 9.7760 & + & 9.4092 & = & 8.3769 \\
 9.7270 & + & 9.7760 & + & 9.4092 & = & 9.4049 \\
 8.6839 & + & 9.7533 & + & 9.6258 & = & 8.7178 \\
 9.7568 & + & 9.7533 & + & 9.6258 & = & 9.3487 \\
 8.2668 & + & 9.6690 & + & 9.8234 & = & 9.1056 \\
 9.7231 & + & 9.6690 & + & 9.8234 & = & 9.6340 \\
 8.4863 & + & 9.4708 & + & 0 & = & 9.2295 \\
 9.6325 & + & 9.4708 & + & 0 & = & 9.8515 \\
 8.1117 & + & -\infty & + & -\infty & = & 8.0534 \\
 9.1425 & + & -\infty & + & -\infty & = & 8.8053
 \end{array}$$

Die Coëfficienten sind logarithmisch angesetzt.

Die Normalgleichungen sind:

$$\begin{array}{rclcl} 1.9024 \delta \kappa + 1.6198 \delta r + 1.3372 \gamma \delta(i'^2) & = & + 0.5885 \\ 1.6198 & + & 2.9166 & + & 2.2110 & = & + 0.4498 \\ 1.3372 & + & 2.2110 & + & 3.4254 & = & + 0.0456, \end{array}$$

woraus

$$\delta \kappa = + 0.3586, \quad \delta r = 0.0999, \quad \gamma \delta(i'^2) = 0.1912 \quad \text{und} \quad \delta(i'^2) = - 0.0434$$

resultirten.

Der mittlere Fehler einer Bedingungsgleichung ist

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{0.0373}{11}} = \pm 0.058$$

einer Helligkeit.¹⁾

Der wahrscheinliche Fehler ist $= \pm 0.039$ einer Helligkeit.

Da der Werth von $\delta(i'^2)$ negativ, mithin der Werth i' imaginär ist, setze ich $\delta i' = i' = 0$, oder $i = \frac{\pi}{2}$, denn es ist kein reeller Werth für $\delta i'$ ausser Null angebar.

Weil der Werth von $\delta \kappa$ so gross ist, erschien es vor der nochmaligen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate mit bloss zwei Unbekannten wünschenswerth, eine etwas genauere Annäherung an die Werthe von r und κ anzustreben. Nach einigen Versuchen gelang es mir, eine bessere Darstellung der mittleren Curve zu erhalten, deren jeweilige Helligkeiten und Abweichungen sich in den zweiten und siebenten bzw. vierten und neunten Spalten der nachstehenden Tafel befinden, und zwar beruht diese Curve auf den Werthen $r = 1.9344$, $\kappa = 0.757$, $q = 1.2$ und $\lambda = 0.4206$.

t	J_R	J_B	δJ_{B-R}	J_R	δJ_{B-R}	J_R	J_B	δJ_{B-R}	J_R	δJ_{B-R}
48	0.9250	0.9190	— 0.0060	0.9279	+ 0.0089	0.9338	0.9389	+ 0.0050	0.9335	— 0.0054
42	0.8910	0.8794	— 0.0116	0.8837	+ 0.0043	0.9062	0.9123	+ 0.0061	0.9034	— 0.0089
36	0.8325	0.8306	— 0.0019	0.8249	— 0.0057	0.8710	0.8804	+ 0.0094	0.8680	— 0.0124
30	0.7595	0.7465	— 0.0130	0.7502	+ 0.0037	0.8306	0.8400	+ 0.0094	0.8272	— 0.0128
24	0.6691	0.6693	+ 0.0002	0.6610	+ 0.0417	0.7849	0.7907	+ 0.0058	0.7816	— 0.0091
18	0.5655	0.4821	— 0.0834	0.5589	+ 0.0768	0.7359	0.7293	— 0.0066	0.7332	+ 0.0039
12	0.4493	0.3821	— 0.0672	0.4483	+ 0.0662	0.6839	0.6719	— 0.0117	0.6833	+ 0.0114
6	0.3496	0.3498	— 0.0004	0.3494	+ 0.0002	0.6405	0.6452	+ 0.0047	0.6401	— 0.0051
0	0.3433	0.3433	0	0.3433	0	0.6365	0.6365	0	0.6365	0

1) Da δJ in derselben Einheit wie das Helligkeitsverhältniss J ausgedrückt ist, so erhalten wir den mittleren Fehler sogleich in Helligkeitsverhältnissen. Deshalb habe ich der Einfachheit wegen durchgehends die mittleren und wahrscheinlichen Fehler in Helligkeitsverhältnissen angegeben und der Abkürzung halber den oben benützten Ausdruck „eine Helligkeit“ beibehalten.

Aus den in den oben erwähnten Spalten befindlichen Zahlenwerthen von J_R , J_B und δJ_{B-R} habe ich die folgenden Bedingungsgleichungen gefunden:

$$\begin{array}{rcl}
 8.7174 \alpha \delta q + 9.7474 \delta r & = & 8.5505 \\
 9.7415 & + & 9.7474 = 8.6674 \\
 9.1743 & + & 9.8215 = 7.7647 \\
 9.7565 & + & 9.8215 = 8.8552 \\
 9.3276 & + & 9.8373 = 8.5999 \\
 9.7896 & + & 9.8373 = 8.8552 \\
 9.4402 & + & 9.8070 = 6.7870 \\
 9.7828 & + & 9.8070 = 8.6455 \\
 9.4827 & + & 9.7249 = 9.4315 \\
 9.7815 & + & 9.7249 = 8.7016 \\
 9.6316 & + & 9.5556 = 9.3134 \\
 9.7385 & + & 9.5556 = 8.9503 \\
 9.8561 & + & 9.0241 = 8.0881 \\
 9.3140 & + & 9.0241 = 8.5541.
 \end{array}$$

Die Coefficienten sind wieder logarithmisch angesetzt und $\log \alpha = 0.4788$. Die Normalgleichungen sind:

$$\begin{array}{l}
 4.0224 \alpha \delta q + 2.8807 \delta r = -0.1207 \\
 2.8807 \alpha \delta q + 4.1162 \delta r = -0.1663.
 \end{array}$$

Hieraus bestimmten sich

$$\delta r = -0.0389, \quad \alpha \delta q = -0.00219, \quad \delta q = -0.0007$$

und der mittlere Fehler einer Bedingungsgleichung

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{0.134}{12}} = \pm 0.105$$

einer Helligkeit. Der wahrscheinliche Fehler ist also $= \pm 0.071$ einer Helligkeit.

Die corrigirten Werthe sind dann

$$q = 1.1993 \quad \text{und} \quad r = 1.8955;$$

aus (11) und (12) ergeben sich ferner

$$\kappa = 0.7580 \quad \text{und} \quad \lambda = 0.4023.$$

Die Lichtverhältnisse und Differenzen einer mit diesen Werthen berechneten Curve befinden sich in den fünften und zehnten bzw. sechsten und elften Spalten der obigen Tafel.

Obwohl nicht die erwartete Anzahl der Zeichenwechsel in den Abweichungen vorhanden ist und die den 12. und 18. Stunden vor und nach dem I. Minimum entsprechenden Abweichungen ziemlich bedeutend sind, sind trotzdem der im ganzen numerisch kleinen Abweichungen, sowie der kleinen Zahlenwerthe von δr und δq wegen

die obigen zuletzt abgeleiteten Elemente einigermaassen gute Approximationen und es scheint ohne Zuhülfenahme einer Excentricität kaum der Mühe werth, eine noch bessere Annäherung zu suchen. Wir werden unten sehen, dass die Methode der kleinsten Quadrate beim Ausgehen von einem andern κ -Werthe uns auf beinahe dieselben Elemente zurückführt.

§ 7.

Aufstellung und Anwendung der Differentialgleichungen vermittelt welcher die im vorigen Paragraphen mitgetheilten Kreiselemente in elliptische umgewandelt werden können.

Den Untersuchungen des vorliegenden Paragraphen liegt die schon in verschiedener Weise gerechtfertigte Voraussetzung zu Grunde, dass die Excentricität als eine Differentialgrösse betrachtet werden kann. In den folgenden Gleichungen habe ich di' nicht direct gleich Null gesetzt, sondern dasselbe in den Gleichungen beibehalten, denn es ist von vorneherein keineswegs ausgeschlossen, dass wenn man eine Excentricität, wie klein sie auch sein mag, einführt, die Neigung um eine merkliche reelle Grösse von $\frac{\pi}{2}$ verschieden sein kann.

Ich gehe bei der Ableitung dieser Differentialgleichungen von zwei gerade entgegengesetzten Anfangspunkten aus. Ich leite dieselben nämlich erstens direct aus den Relationen für Kreiselemente, und zweitens aus den für elliptische Elemente gültigen dadurch ab, dass ich i' und e als Differentialgrössen betrachte. Die Resultate beider Betrachtungsweisen stimmten natürlich überein. Ich schlage zuerst den ersterwähnten Weg ein.

Bezeichne M die mittlere Anomalie in der wahren Bahn; da wir die in § 4 definirten M und H nicht mehr zu unterscheiden brauchen, wollen wir, um Verwirrung zu vermeiden, schreiben:

$$(1) \quad H_I = \pi (\lambda + \kappa^2) (1 - J_I)$$

$$(2) \quad H_{II} = \pi \left(\frac{\lambda + \kappa^2}{\lambda} \right) (1 - J_{II})$$

$$(3) \quad H = \varphi' + \kappa^2 \varphi - \varrho' \sin \varphi'.$$

Das dritte H bezieht sich sowohl auf H_I wie auf H_{II} .

Bezeichne

β die Länge in der wahren Bahn vom Min. I aus gezählt,

$\tilde{\omega}$ die Perihellänge vom Min. I aus gezählt,

v die wahre Anomalie,

r den Radiusvector,

$2p$ den Parameter und a die halbe grosse Axe.

Setzen wir $e = \delta e$, so haben wir, indem wir die höheren Potenzen der Excentricität vernachlässigen

$$(4) \quad r = a + \frac{1}{2} a \cos v \cdot \delta e$$

$$(5) \quad v = M + 2 \sin M \cdot \delta e$$

$$\beta = v + \tilde{\omega}$$

$$\beta_0 = M + \tilde{\omega};$$

β_0 bedeutet die mittlere Länge.

Es folgt daher aus (5), dass

$$(5a) \quad \delta \beta = \beta - \beta_0 = 2 \sin (\beta_0 - \tilde{\omega}) \cdot \delta e$$

ist. Setzen wir nun

$$(6) \quad \delta x = 2 \delta e \cos \tilde{\omega} \quad \text{und} \quad \delta y = 2 \delta e \sin \tilde{\omega},$$

so haben wir

$$(7) \quad \delta \beta = \sin \beta_0 \delta x - \cos \beta_0 \delta y.$$

$\tilde{\omega}$ und δe bestimmen sich dann aus

$$(8) \quad \operatorname{tg} \tilde{\omega} = \frac{\delta y}{\delta x} \quad \text{und} \quad \delta e = \frac{1}{2} \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}.$$

Ich bemerke, dass β_0 hier nichts anderes ist als diejenige Winkelgrösse, die wir in § 4 mit β bezeichnet haben.

Wir wollen jetzt die in § 6 angegebenen Gleichungen differenzieren, indem wir das β überall als veränderlich betrachten.

Durch Differenzirung bekommen wir dann aus (3) § 6

$$(9) \quad \delta \left(\frac{1}{f} \right) = - \frac{f q^3 \cos^2 \beta}{m} \delta (\kappa^2) + \frac{f(1 - q^2)}{2} \sin 2 \beta \delta \beta,$$

aus (3)

$$(10) \quad \delta H = \varphi \delta (\kappa^2) - 2 \sin \varphi' \delta \varphi',$$

aus (10) § 6 und (9)

$$(11) \quad \delta J_I = \frac{1}{f} \delta J_I - \frac{J_I f q^3 \cos^2 \beta}{m} \delta (\kappa^2) + \frac{J_I f (1 - q^2) \sin 2 \beta}{2} \delta \beta,$$

aus (4) § 6 und (9)

$$(12) \quad \delta \varphi' = \frac{1}{f} \delta \varphi - \frac{\varphi f q^3 \cos^2 \beta}{m} \delta (\kappa^2) + \frac{\varphi f (1 - q^2) \sin 2 \beta}{2} \delta \beta,$$

und schliesslich aus (1)

$$(13) \quad \delta H_I = \pi (1 - J_I) [\delta (\kappa^2) + \delta \lambda] - \pi (\lambda + \kappa^2) \delta J_I.$$

Aus (b) § 6 und den Gleichungen (10)–(13) erhalten wir

$$(14) \quad \pi (\lambda + \kappa^2) \delta J_I = 2 \kappa K_I \delta \kappa + L_I \delta \beta + 2 \sin \varphi' \delta \varrho,$$

wo K_I dieselbe Bedeutung wie in § 6 hat, d. h. wo

$$K_I = A J_I f^2 \cos^2 \beta + B (f - J_I) - f \varphi - C \varrho f^2 \cos^2 \beta \sin \varphi'$$

und

$$L_I = \left\{ \varrho \sin \varphi' - \frac{\pi}{2} (\lambda + \kappa^2) \right\} f^2 (1 - q^2) \sin 2 \beta$$

ist. Ganz in derselben Weise finden wir, wenn wir die Gleichungen für H_{II} und J_{II} differenzieren

$$(15) \quad \pi \frac{\lambda + \kappa^2}{\lambda} \delta J_{II} = 2 \kappa K_{II} \delta \kappa + L_{II} \delta \beta + 2 \sin \varphi' \delta \varrho,$$

wo

$$K_{II} = \frac{A J_{II} f^2 \cos^2 \beta}{\lambda} + \pi (f - J_{II}) - f \varphi - C \varrho f^2 \cos^2 \beta \sin \varphi'$$

und

$$L_{II} = \left\{ \varrho \sin \varphi' - \frac{\pi}{2} \frac{\lambda + \kappa^2}{\lambda} \right\} f^2 (1 - q^2) \sin 2 \beta$$

ist. Differenziert man (16) § 4, so erhält man, da $i' = \frac{\pi}{2} - i$ ist,

$$\delta \varrho = \frac{\varrho}{r} \delta r + \frac{r^2 \sin 2 i' \cos^2 \beta}{2 \varrho} \delta i' + \frac{r^2}{2 \varrho} \cos^2 i' \sin 2 \beta \delta \beta.$$

Nehmen wir an, dass i' sehr klein ist, und setzen wir dann $\sin 2 i' = 2 i'$ und $\cos i' = 1$, so erhalten wir

$$(16) \quad \delta \varrho = \frac{\varrho}{r} \delta r + \frac{r^2 \cos^2 \beta}{2 \varrho} \delta (i'^2) + \frac{r^2}{2 \varrho} \sin 2 \beta \delta \beta.$$

Substituieren wir (16) in (14) und (15), so finden wir

$$(III) \quad \pi (\lambda + \kappa^2) \delta J_I = 2 \kappa K_I \delta \kappa + N_I \sin \beta \delta x - N_I \cos \beta \delta y + \frac{2 \varrho \sin \varphi' \delta r}{r} \\ + \frac{r^2}{\varrho} \cos^2 \beta \sin \varphi' \delta (i'^2),$$

wo

$$N_I = L_I + \frac{r^2}{\varrho} \sin \varphi' \sin 2 \beta$$

ist, und schliesslich

$$(IV) \quad \pi \left(\frac{\lambda + \kappa^2}{\lambda} \right) \delta J_{II} = 2 \kappa K_{II} \delta \kappa + N_{II} \sin \beta \delta x - N_{II} \cos \beta \delta y + \frac{2 \varrho}{r} \sin \varphi' \delta r \\ + \frac{r^2}{\varrho} \cos^2 \beta \sin \varphi' \delta (i'^2),$$

wo

$$N_{II} = L_{II} + \frac{r^2}{\varrho} \sin \varphi' \sin 2\beta$$

ist. β unterscheidet sich von β_0 , wie aus (5a) erhellt, bloss um eine Differentialgrösse derselben Ordnung wie δe , folglich kann β durch β_0 in den Coefficienten der Gleichungen (III) und (IV) ersetzt werden. In diesen Coefficienten können wir uns ferner, da wir Differentialgrössen der höheren Ordnungen vernachlässigen, auch der folgenden Annäherungen bedienen:

$$(a) \quad \begin{cases} r = a [1 - 2 \cos (\beta - \tilde{\omega}) \delta e] = a \\ \frac{\delta r}{r} = \frac{\delta a}{a} [1 - \cos (\beta - \tilde{\omega}) \delta e] = \frac{\delta a}{a} \\ \sin 2\beta_0 = 2 \frac{\varrho}{a} \cos \beta_0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (III) und (IV) behalten ihre Gültigkeit bloss so lange die Verfinsterungen dauern, und folglich muss man, falls man den ganzen Lauf der Curve in Betracht ziehen will, eine dritte Differentialformel ableiten, die ausserhalb der Verfinsterungsgrenzen anwendbar ist.

Vor dem Beginn und nach dem Schlusse der Finsternisse bleiben nun J_I und J_{II} selbstverständlich gleich der Einheit. Demnach haben wir sogleich aus (10) und (11) § 6

$$J_I = J_{II} = f = J$$

etwa. Differenziren wir wie zuvor, so ergibt sich

$$\delta J = 2 \frac{q^3}{m} \kappa f^3 \cos^2 \beta \delta \kappa - (1 - q^2) f^3 \sin \beta \cos \beta \delta \beta$$

und aus (7) durch Substitution

$$(V) \quad \frac{\delta J}{f^3 \cos \beta} = 2 \frac{q^3 \kappa \delta \kappa}{m} - (1 - q^2) \sin^2 \beta \delta x + \frac{(1 - q^2)}{2} \sin 2\beta.$$

Wir hätten diese Gleichung auch direct aus (III) oder (IV) ableiten können, wenn wir die folgenden vor oder nach den Verfinsterungen gültigen Beziehungen eingeführt hätten:

$$L_I = \lambda L_{II}, \quad K_I = \lambda K_{II}, \quad \varphi = \varphi' = 0 \quad \text{und} \quad J_I = J_{II} = 1.$$

Um nun eine Controlle der Gleichungen (III) und (IV) zu erlangen, leite ich die Beziehungen zwischen denselben Differentialgrössen direct aus denjenigen Gleichungen ab, die für elliptische Elemente gelten. Ich führe die Hauptgleichungen dieser Ableitung hier ebenfalls an.

Nehmen wir die bekannten Beziehungen zwischen den elliptischen Elementen r , v , e und M , sowie die Gleichung

$$\operatorname{tg}(p - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v + \eta),$$

wo p den Positionswinkel des Begleiters, Ω den des Knotens und η den Winkelabstand des Perihels vom Knoten bedeuten, so finden wir durch Differenzirung nach einigen Reductionen, indem wir

$$n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} i \sin i \sin(p - \Omega)$$

setzen, für das Verhältniss $\frac{\delta \varrho}{\varrho}$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varrho}{\varrho} = & \frac{\delta a}{a} - n \delta \eta - \sin^2(p - \Omega) \operatorname{tg} i \delta i + \frac{a^2}{r^2} (e \sin E - n \cos \varphi) \delta M \\ & + \left[-\frac{a}{r} \cos E + \frac{a^2}{r^2} \left\{ e - \cos E - n \cos \varphi \sin E - \frac{n r \sin E}{a \cos \varphi} \right\} \right] \delta e, \end{aligned}$$

wo E die excentrische Anomalie und $\sin \varphi = e$ ist.

Dieser Werth von $\delta \varrho$ in (14) substituirt, liefert die gesuchte Beziehung für das erste Minimum und in (15) substituirt, diejenige für das zweite Minimum. Die so abgeleiteten Beziehungen gelten natürlich ganz allgemein, wie gross die Excentricität auch sein mag. Ehe wir diese Substitutionen ausführen, empfiehlt es sich jedoch, diejenigen Vereinfachungen vorzunehmen, die aus der Annahme einer kleinen Excentricität und einer kleinen Abweichung der Neigung von 90° hervorgehen, denn nur um diese Voraussetzungen handelt es sich im vorliegenden Falle.

Erinnern wir uns nun daran, dass $\delta \mu$ selbstverständlich gleich Null gesetzt werden muss, und ferner, dass zwischen den gegenwärtigen und den früher benützten Symbolen die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\eta = \frac{\pi}{2} + \tilde{\omega}$$

$$\beta = \tilde{\omega} + v = \eta + v - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} n = & -\frac{1}{2} \frac{\sin 2(p - \Omega)}{\sin i'} \cos^2 i' \\ = & -\frac{\sin(p - \Omega)}{i'} = \operatorname{ctg} \beta, \end{aligned}$$

da

$$\operatorname{tg}(p - \Omega) = i' \operatorname{tg}(\eta + v) = -i' \operatorname{ctg} \beta = \sin(p - \Omega)$$

ist.

Setzen wir nun diese angenäherten Werthe sowie die durch (a) gelieferten in die obige Gleichung für $\frac{\delta \varrho}{\varrho}$ ein, so haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\delta \varrho}{\varrho} &= \frac{\delta a}{a} + \frac{\cos^2 \beta}{2 \sin \beta} \delta(i'^2) + 2 \operatorname{tg} \beta \sin(\beta_0 - \tilde{\omega}) \delta e \\ &= \frac{\delta a}{a} + \frac{\cos^2 \beta}{2 \sin \beta} \delta(i'^2) + \operatorname{tg} \beta \sin \beta_0 \delta x - \operatorname{tg} \beta \cos \beta_0 \delta y.\end{aligned}$$

Substituiren wir diesen Werth von $\delta \varrho$ in (14), indem wir die Beziehung (7) in Betracht ziehen, so ergibt sich die früher abgeleitete Gleichung (III), und dieselben Substitutionen in (15) ergeben die Gleichung (IV).

Ich gehe jetzt zu der Anwendung der abgeleiteten Gleichungen über.

Vermittelst der am Schlusse des vorigen Paragraphen angegebenen Werthe von r, κ, λ, q berechnete ich die Coëfficienten der Gleichungen (III), (IV) und (V) von 6^h zu 6^h während der ganzen Periode des Lichtwechsels von 309.84 Stunden, indem ich für die Dauer der Verfinsterungen (III) und (IV), danach und davor aber die Gleichung (V) benützte. Den Hauptepochen wurde natürlich durch die Befriedigung der Gleichungen (12) und (13) § 6 Genüge geleistet. Durch dieses Verfahren erhielt ich die unten stehenden 48 Bedingungsgleichungen, und da die Punkte, vermittelt welcher die Argelander'sche Curve gebildet wurde, der Zeit nach gleichmässig vertheilt sind, so legte ich jeder dieser Gleichungen gleiches Gewicht bei. Für $\delta J_I, \delta J_{II}$ und δJ benützte ich die jeweiligen Abweichungen der in § 6 berechneten von der wirklichen (nicht der durch Umklappen der einen Hälfte erhaltenen) Curve Argelanders.

Nachdem die neuen Unbekannten, um die Bedingungsgleichungen möglichst homogen zu machen, durch die Relationen

$w = 1.3755 \delta \kappa, \quad x = 1.5959 \delta x, \quad y = 2.9228 \delta y, \quad a = 0.7032 \delta a, \quad z = 6.7308 \delta(i'^2)$ eingeführt worden waren, lauteten diese Bedingungsgleichungen folgendermaassen:

I	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 6^h \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{l} 8.0526 \\ 7.8307 \end{array}$	$\nu = 9.6263 w + 9.0826 x + 9.7315 y + 9.1550 a + 0.0000 z$
II	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 6 \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{l} 8.9532 \\ 9.2993 \end{array}$	$= 9.6272 + 9.1195 + 9.7694 + 9.1550 + 0.0000$
I	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 12 \\ 12 \end{array}$	$\begin{array}{l} 9.9675 \\ 9.7472 \end{array}$	$= 9.7973 + 9.5286 + 9.8709 + 9.7100 + 9.9398$
II	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 12 \\ 12 \end{array}$	$\begin{array}{l} 9.6494 \\ 9.2993 \end{array}$	$= 9.9608 + 9.5793 + 9.9218 + 9.7100 + 9.9398$
I	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 18 \\ 18 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0.1505 \\ 9.5044 \end{array}$	$= 9.6152 + 9.7841 + 9.9390 + 9.8798 + 9.7348$
II	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 18 \\ 18 \end{array}$	$\begin{array}{l} 9.3825 \\ 8.3511 \end{array}$	$= 9.9930 + 8.8451 + 0.0000 + 9.8798 + 9.7348$
I	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 24 \\ 24 \end{array}$	$\begin{array}{l} 9.9413 \\ 8.6324 \end{array}$	$= 9.2936 + 9.8526 + 9.8566 + 9.9646 + 9.5378$
II	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 24 \\ 24 \end{array}$	$\begin{array}{l} 8.7490 \\ 9.6575 \end{array}$	$= 9.9915 + 9.9383 + 9.9523 + 9.9646 + 9.5378$

$$\begin{array}{lcl}
\text{I} \begin{cases} -30^h \\ +30 \end{cases} \begin{matrix} 9_n 3665 \\ 9.2049 \end{matrix} & \nu = 8.6333 w + 9.8675 x + 9_n 7628 y + 0.0000 a + 9.3338 z & \\
\text{II} \begin{cases} -30 \\ +30 \end{cases} \begin{matrix} 8.9795 \\ 9.8021 \end{matrix} & = 0.0000 + 9.9839 + 9_n 8792 + 0.0000 + 9.3338 & \\
\text{I} \begin{cases} -36 \\ +36 \end{cases} \begin{matrix} 8_n 6547 \\ 9.2753 \end{matrix} & = 8_n 4164 + 9.8455 + 9_n 6108 + 9.9921 + 9.1079 & \\
\text{II} \begin{cases} -36 \\ +36 \end{cases} \begin{matrix} -\infty \\ 9.8477 \end{matrix} & = 9.9570 + 0.0000 + 9_n 7853 + 9.9921 + 9.1079 & \\
\text{I} \begin{cases} -42 \\ +42 \end{cases} \begin{matrix} 9_n 0738 \\ 8.3536 \end{matrix} & = 8_n 5501 + 9.7852 + 9_n 4646 + 9.9369 + 8.8409 & \\
\text{II} \begin{cases} -42 \\ +42 \end{cases} \begin{matrix} 9_n 0391 \\ 9.7924 \end{matrix} & = 9.9259 + 9.9865 + 9_n 6659 + 9.9369 + 8.8409 & \\
\text{I} \begin{cases} -48 \\ +48 \end{cases} \begin{matrix} 9_n 1732 \\ 8_n 7058 \end{matrix} & = 8.5433 + 9.6836 + 9_n 2535 + 9.8004 + 8.8756 & \\
\text{II} \begin{cases} -48 \\ +48 \end{cases} \begin{matrix} 9_n 3345 \\ 9.7245 \end{matrix} & = 9.8904 + 9.9317 + 9_n 5016 + 9.8004 + 8.8756 & \\
\text{I} \begin{cases} -54 \\ +54 \end{cases} \begin{matrix} 8_n 6431 \\ 8_n 5060 \end{matrix} & = 9.4747 + 9.3363 + 8_n 7854 & \\
\text{II} \begin{cases} -54 \\ +54 \end{cases} \begin{matrix} 9_n 0483 \\ 8.7023 \end{matrix} & = 9.4747 + 9.3363 + 8_n 7854 & \\
\text{I} \begin{cases} -60 \\ +60 \end{cases} \begin{matrix} 8_n 8970 \\ 8_n 3592 \end{matrix} & = 9.3548 + 9.3830 + 8_n 6881 & \\
\text{II} \begin{cases} -60 \\ +60 \end{cases} \begin{matrix} 8_n 8064 \\ 8.9274 \end{matrix} & = 9.3548 + 9.3830 + 8_n 6881 & \\
\text{I} \begin{cases} -66 \\ +66 \end{cases} \begin{matrix} 8_n 4226 \\ 8_n 4226 \end{matrix} & = 9.1768 + 9.4150 + 8_n 5261 & \\
\text{II} \begin{cases} -66 \\ +66 \end{cases} \begin{matrix} 8_n 9175 \\ 9.1775 \end{matrix} & = 9.1768 + 9.4150 + 8_n 5261 & \\
\text{I} \begin{cases} -72 \\ +72 \end{cases} \begin{matrix} 8_n 6050 \\ 9_n 0699 \end{matrix} & = 8.8578 + 9.4332 + 8_n 2162 & \\
\text{II} \begin{cases} -72 \\ +72 \end{cases} \begin{matrix} 9_n 2817 \\ 9.8856 \end{matrix} & = 8.8578 + 9.4332 + 8_n 2162. &
\end{array}$$

Aus diesen ergaben sich die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{rcl}
+ 14.4034 w + 11.3807 x - 12.1900 y + 12.3451 a + 7.6109 z & = & - 0.0442 \nu \\
+ 11.3807 & + & 15.3106 - 16.4478 + 15.9107 + 5.1698 = + 0.0800 \\
- 12.1900 & - & 16.4478 + 13.7590 - 14.3877 - 9.1711 = + 2.1600 \\
+ 12.3451 & + & 15.9107 - 14.3877 + 19.2760 + 7.0697 = - 0.9922 \\
+ 7.6109 & + & 5.1698 - 9.1711 + 7.0697 + 8.9748 = - 2.4827,
\end{array}$$

worin $\log \nu = 9.4344$ ist.

Aus den Normalgleichungen bestimmten sich die Unbekannten wie folgt:

$$w = + 0.3382 \nu, \quad x = - 0.1101 \nu, \quad y = - 0.0856 \nu, \quad a = - 0.0330 \nu, \quad z = - 0.5557 \nu,$$

folglich ist

$$\delta z = + 0.0668, \quad \delta x = - 0.01877, \quad \delta y = - 0.00796, \quad \delta a = - 0.01277,$$

$$\delta(i'^2) = - 0.0239, \quad \text{also } i' = \sqrt{-0.0239}.$$

Wir haben ferner

$$\delta e = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{2}\right)^2} = 0.0102 \quad \text{und} \quad \tilde{\omega} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = 203^\circ 0'.$$

Es ist dann

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{5.9454}{43}} = \pm 0.3717 \quad \text{und} \quad \varepsilon = \pm 0.0968$$

dem mittleren Fehler einer Bedingungsgleichung und

$$\varepsilon_w = \pm 0.0653$$

dem wahrscheinlichen Fehler einer Bedingungsgleichung in Helligkeiten ausgedrückt.

Die Gleichungen sind also im vorliegenden Falle anwendbar, da diese Werthe alle klein genug sind, um als Differentialgrössen behandelt zu werden. $\delta(i'^2)$ stellt sich wieder negativ, jedoch numerisch sehr klein heraus. Wir müssen es also wieder gleich Null setzen und die Normalgleichungen unter dieser Bedingung auflösen.

Der mittlere Fehler ist übrigens hier grösser als bei der früheren Kreisbahn, in Folge der Unsymmetrie der beiden Curvenhälften, die wir nicht wie früher vereinigt haben.

Nachdem ich $\delta(i'^2) = 0$ gesetzt und dementsprechend die erforderlichen Abänderungen der früher benützten Gleichungen ausgeführt hatte, fand ich die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{rcll} 14.4034 w + 11.3807 x - 12.1900 y + 12.3451 a & = & -0.0442 v & (\lg v = 9.4344) \\ 11.3807 & + & 15.3106 & - 16.4478 + 15.9107 = + 0.0800 \\ - 12.1900 & - & 16.4478 & + 13.7590 - 14.3877 = + 2.1600 \\ 12.3451 & + & 15.9107 & - 14.3877 + 19.2760 = - 0.9922, \end{array}$$

woraus sich die Differentialgrössen, wie folgt, bestimmten:

$$\begin{aligned} \delta a &= + 0.0411, \quad \delta y = - 0.0015, \quad \delta x = - 0.0175, \quad \delta z = - 0.0052 \\ \delta e &= 0.01759 \quad \text{und} \quad \eta = 184^\circ 53'. \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler einer Bedingungsgleichung

$$\varepsilon \text{ ist} = \pm \sqrt{\frac{8.3979}{44}} = \pm 0.4368$$

oder in Helligkeiten

$$= \pm 0.1188.$$

Der wahrscheinliche Fehler

$$\varepsilon_w \text{ ist} = \pm 0.0899.$$

Die Excentricität ist beinahe dieselbe wie diejenige, die ich in § 4 aus den Hauptepochen abgeleitet habe.

Ich finde also als die wahrscheinlichsten Werthe der elliptischen Elemente, die man aus der Argelander'schen Lichtcurve ableiten kann und die offenbar für die Epoche 1855 gelten,

$$\begin{aligned}
a &= 1.9366 & P &= 12.91 \\
e &= 0.0176 & \mu &= 27.887 \\
i &= 90^\circ & \kappa &= 0.7528 \\
\eta &= 94^\circ 53' \text{ vom Knoten} & \lambda &= 0.3990 \\
\Omega &= 0 \text{ (angenommen)} & q &= 1.2031 \\
\tau &= 6^d 15^h 4 \text{ nach dem I. Min. oder} \\
T &= 1855 \text{ Jan. } 13^d 6^h 35.
\end{aligned}$$

Das Datum des ersten Minimums ist nämlich nach Argelanders Angabe
1855 Jan. 6^d 14^h 95.

Demnach ist

$$T = 1855 \text{ Jan. } 13^d 6^h 3.$$

Vermittelst dieser Elemente und der schon aufgestellten Formeln habe ich die unten mitgetheilte Lichtcurve berechnet, indem ich das ϱ aus

$$M = \mu(t - \tau), \quad V = M + 2e \sin M,$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad \varrho = r \frac{\cos \beta}{\cos(p - \Omega)}$$

ableitete, wo $p - \Omega$ durch $\operatorname{tg}(p - \Omega) = -\cos i \operatorname{ctg} \beta$ gegeben wird.

t	Minimum I			Minimum II		
	J_B	J_R	δJ_{B-R}	J_B	J_R	δJ_{B-R}
— 72	0.9963	0.9956	+ 0.0007	0.9918	0.9970	— 0.0052
— 66	0.9870	0.9852	+ 0.0018	0.9836	0.9945	— 0.0109
— 60	0.9683	0.9701	— 0.0018	0.9696	0.9833	— 0.0137
— 54	0.9524	0.9513	+ 0.0011	0.9490	0.9672	— 0.0182
— 48	0.9147	0.9270	— 0.0123	0.9258	0.9482	— 0.0224
— 42	0.8732	0.8849	— 0.0117	0.8995	0.9217	— 0.0222
— 36	0.8209	0.8268	— 0.0059	0.8680	0.8886	— 0.0206
— 30	0.7296	0.7525	— 0.0229	0.8306	0.8494	— 0.0188
— 24	0.5836	0.6019	— 0.0183	0.7836	0.8048	— 0.0212
— 18	0.4336	0.4993	— 0.0657	0.7246	0.7558	— 0.0312
— 12	0.3661	0.4275	— 0.0614	0.6674	0.7044	— 0.0370
— 6	0.3484	0.3487	— 0.0003	0.6433	0.6542	— 0.0109
0	0.3433	0.3433	+ 0	0.6365	0.6368	— 0.0003
+ 6	0.3499	0.3488	+ 0.0011	0.6472	0.6372	+ 0.0100
+ 12	0.3988	0.4275	— 0.0287	0.6762	0.6689	+ 0.0073
+ 18	0.5306	0.5591	— 0.0285	0.7340	0.7203	+ 0.0137
+ 24	0.6572	0.6624	+ 0.0052	0.7978	0.7716	+ 0.0262
+ 30	0.7644	0.7528	+ 0.0116	0.8498	0.8289	+ 0.0209
+ 36	0.8416	0.8266	+ 0.0150	0.8931	0.8622	+ 0.0309
+ 42	0.8857	0.8845	+ 0.0012	0.9255	0.8997	+ 0.0258
+ 48	0.9234	0.9268	— 0.0034	0.9524	0.9307	+ 0.0217
+ 54	0.9537	0.9508	+ 0.0029	0.9627	0.9545	+ 0.0082
+ 60	0.9732	0.9694	+ 0.0038	0.9881	0.9732	+ 0.0149
+ 66	0.9870	0.9847	+ 0.0023	0.9977	0.9877	+ 0.0100
+ 72	0.9940	0.9952	— 0.0012	1.0049	0.9970	+ 0.0079

Durch Zuhülfenahme einer Excentricität werden also einige der Abweichungen der berechneten von der wirklichen Lichtcurve etwas verkleinert und insofern es bloss auf die numerischen Werthe der Abweichungen im Grossen und Ganzen ankommt, könnte man vielleicht mit dieser Darstellung der Curve zufrieden sein. Diese sowie die wirkliche Argelander'sche Curve sind auf der dieser Abhandlung am Schlusse beigefügten Tafel dargestellt; erstere als punktirte, letztere als volllaufende Linie.

Da nun die Excentricität hier, wo wir die Curve in ihrer Gesammtheit in Betracht gezogen haben, wieder fast denselben Werth aufweist wie in § 2, so können wir aus diesen Rechnungen jedenfalls schliessen, dass bei β Lyrae zu der Epoche 1855 eine kleine Excentricität existirte, deren Werth allem Anscheine nach nicht wesentlich von 0.02 differirte. Weil nun der Mittelpunktsabstand so verhältnissmässig klein ist, muss die gegenseitige Anziehung der Körper ungeheuer gross sein. Es ist übrigens höchst unwahrscheinlich, dass die Körper eine bedeutende Dichtigkeit besitzen, da das Spectrum so ausserordentlich reich an hellen Linien ist. Spätere Betrachtungen deuten sogar an, dass die mittlere Dichtigkeit des Systems ungemein gering ist. Sobald daher eine noch so kleine Excentricität auftritt, müssten derartig gewaltige Fluthwirkungen entstehen, dass das Kepler'sche Gesetz nicht mehr zuträfe. Diese Wirkungen und in deren Folge die Lichtentwicklung würden offenbar bei dem Perihel am stärksten sein und da es einige Zeit beanspruchen müsste, ehe die Helligkeitwirkungen ihren Höhepunkt erreichen und sich deutlich bemerkbar machen könnten, so müsste die Helligkeit zu einer gegebenen Zeit nach dem Perihel grösser sein als zu derselben Zeit davor. Bedenken wir nun, dass das Perihel nach unseren Rechnungen etwas mehr als 184° nach dem ersten Minimum, d. h. etwas mehr als 4° nach dem zweiten Minimum liegt, so ersehen wir, dass das Nichtvorhandensein der zu erwartenden Anzahl der Zeichenwechsel unter den in der letzten Spalte befindlichen Differenzen durch die Fluthwirkungen wenigstens zum Theil erklärt wird. Die Resultate der photometrischen Beobachtungen würden natürlich durch die Fluthwirkungen so stark beeinträchtigt werden, dass der Werth der ihnen als Grundlage einer Bahnbestimmung zukommt, eine wesentliche Einschränkung erfahren müsste. Bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft aber ist die quantitative Beantwortung der Frage, wie durchgreifend dieser Einfluss ist, gänzlich ausgeschlossen, weil von einer mathematischen Verfolgung der photometrischen Wirkungen solcher enorm grosser Gezeiten, wie diejenigen, die hier in Frage kommen, überhaupt nicht die Rede sein kann. Trotz alledem jedoch halte ich es für gerechtfertigt, der obigen Bahn einen ziemlich hohen Grad von Zuverlässigkeit zuzuschreiben, da die Curve in ihrer Gesammtheit durch dieselbe dargestellt wird.

Es kann jedoch gegen diese Bahn ein Einwurf erhoben werden; das Perihel liegt nämlich zwischen dem zweiten und dem ersten Minimum. Diese Thatsache erfordert eine Verschiebung des zweiten Minimums um 2^h gegen das zweite Maximum, d. h. um 0^h1 über den Mittelpunkt der Periode des Lichtwechsels hinaus. Eine so grosse Verschiebung erscheint auf den ersten Blick kaum gestattet, da einige Punkte der wirklichen Lichtcurve dadurch von der berechneten weiter entfernt werden als der wahrscheinliche

Fehler der betreffenden Punkte, wie ihn Argelander gegeben hat, es rechtfertigen würde. Dieser Einwurf wird aber dadurch abgeschwächt, dass die durch die Fluthwirkungen hervorgebrachte Erhöhung der Helligkeit nach dem zweiten Minimum eine Verfrühung dieses Minimums zur Folge haben muss.

Da nun die beiden Körper so ausserordentlich nahe aneinander stehen, so hat man Grund zu der Vermuthung, dass vielleicht auch andere Werthe der Elemente den Lichtwechsel gerade so gut wie die obigen darstellen könnten. Aus diesem Grunde erschien es mir rathsam, diesen Gegenstand noch einmal durch Rechnung zu prüfen. Zu diesem Zwecke brauchen wir bloss die Kreisbahn zu untersuchen, die als Grundlage der im vorliegenden Paragraphen angestellten Untersuchungen gedient hat. Wenn diese Kreisbahn sich bestätigen lässt, so dürfte man auch die daraus abgeleitete elliptische Bahn als constatirt ansehen können.

§ 8.

Bestätigung der den Rechnungen des vorigen Paragraphen zu Grunde gelegten Kreiselemente.

Wir behandeln daher die Frage, ob man zu den früher gefundenen Kreisbahnelementen gelangt, wenn man an einem derselben, etwa κ , irgend eine willkürliche Aenderung anbringt und wiederholt die Methode der kleinsten Quadrate anwendet.

Nachdem ich die Resultate der in § 6 erwähnten Versuche untereinander verglichen hatte, überzeugte ich mich, dass ein etwas kleinerer Werth von κ die zu den 12. und 18. Stunden vor und nach dem ersten Minimum gehörigen Abweichungen verkleinern würde. Demzufolge setzte ich $\kappa = 0.7480$ und $r = 1.825$. Dieser Werth von κ ergibt $\lambda = 0.3959$ und $q = 1.2067$. Vermittelst der Gleichungen (I) und (II) § 6 fand ich die Bedingungsgleichungen, die, nachdem sie homogen gemacht worden waren, lauteten:

$$\begin{array}{rcl}
 -0.0626 (\alpha \delta \kappa) + 0.5687 \delta r & = & + 0.0415 \nu \\
 -0.1203 & + & 0.5687 = + 0.4519 \\
 -0.1044 & + & 0.6872 = + 0.1597 \\
 -0.2106 & + & 0.6872 = + 0.6495 \\
 -0.0547 & + & 0.7451 = + 0.3498 \\
 -0.2998 & + & 0.7451 = + 0.8312 \\
 + 0.0512 & + & 0.7301 = + 0.1358 \\
 -0.3335 & + & 0.7301 = + 0.7867 \\
 + 0.1855 & + & 0.6751 = - 0.4137 \\
 -0.3999 & + & 0.6751 = + 0.6697 \\
 + 0.3916 & + & 0.5497 = - 1.0000 \\
 -0.4185 & + & 0.5497 = + 0.0928 \\
 + 0.5849 & + & 0.3660 = - 0.8817 \\
 -0.4717 & + & 0.3660 = - 0.2622 \\
 + 0.2721 & + & 0.0712 = + 0.0527 \\
 + 1.0000 & + & 0.0712 = + 0.2622
 \end{array}$$

worin $\log \alpha = 1.4240$, $\log \nu = 9.2740$ und die Coëfficienten numerisch angesetzt sind.

Die Punkte in der Nähe der Maxima sind hier nicht benützt worden, weil es galt, eine Bahn zu finden, durch welche die verhältnissmässig grossen Differenzen vor und nach dem ersten Minimum etwas verkleinert würden. Ein solches Verfahren ist offenbar gleichbedeutend mit der Zutheilung eines grösseren Gewichtes an die in der Nähe der Minima befindlichen Punkte.

Die Normalgleichungen sind:

$$\begin{aligned} 2.4418 (\alpha \delta x) - 0.9606 \delta r &= + 2.1491 v \\ - 0.9606 (\alpha \delta x) + 5.5614 \delta r &= - 1.6679 v \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta x &= - 0.1079 & x + \delta x &= 0.6401 \\ \delta r &= + 0.0298 & r + \delta r &= 1.8548 \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{2.6273}{14}} = \pm 0.4332 v = \pm 0.0814, \text{ dem mittleren Fehler und}$$

$$\varepsilon_w = \pm 0.0549, \text{ dem wahrscheinlichen Fehler}$$

in Einheiten der Helligkeit.

Die aus den corrigirten Elementen berechnete Lichtcurve befindet sich in der Tafel:

t	Minimum I			Minimum II		
	J_B	J_R	δJ_{B-R}	J_B	J_R	δJ_{B-R}
72	0.9951	0.9961	— 0.0010	0.9983	0.9961	+ 0.0022
66	0.9870	0.9831	+ 0.0039	0.9906	0.9831	+ 0.0075
60	0.9678	0.9627	+ 0.0051	0.9788	0.9627	+ 0.0161
54	0.9530	0.9378	+ 0.0152	0.9558	0.9378	+ 0.0180
48	0.9190	0.9101	+ 0.0089	0.9389	0.9101	+ 0.0288
42	0.8794	0.8760	+ 0.0034	0.9123	0.8803	+ 0.0320
36	0.8306	0.8194	+ 0.0112	0.8804	0.8443	+ 0.0361
30	0.7464	0.7423	+ 0.0041	0.8400	0.8035	+ 0.0365
24	0.6193	0.6451	— 0.0258	0.7907	0.7587	+ 0.0320
18	0.4821	0.5322	— 0.0501	0.7293	0.7115	+ 0.0178
12	0.3821	0.4127	— 0.0306	0.6719	0.6651	+ 0.0068
6	0.3492	0.3444	+ 0.0048	0.6452	0.6384	+ 0.0068
0	0.3433	0.3433	0	0.6365	0.6365	0

Die Werthe in der Nähe des Hauptminimums sind in der That etwas verkleinert worden. Diese Verbesserung ist jedoch nur um den Preis einer Einbusse an Genauigkeit in der Nähe des zweiten Minimums erzielt worden. Aus diesem Grunde erscheint es angebracht, die Curve wieder in ihrer Gesamtheit in Betracht zu ziehen und wiederum die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden.

Vermittelst dieser corrigirten Elemente erhielt ich die folgenden Bedingungs-
gleichungen:

$$\begin{array}{rclcl}
+ 0.0974 (\alpha \delta \kappa) + 0.3171 \delta r & = & + 0.0302 \nu \\
+ 1.0000 & + 0.3171 & = & + 0.8766 \\
- 0.0666 & + 0.5015 & = & + 0.0995 & + 0.0183 (\alpha \delta \kappa) = - 0.0089 \nu \\
+ 0.9091 & + 0.5015 & = & + 0.9890 & + 0.0183 & = & + 0.0603 \\
- 0.0685 & + 0.5671 & = & + 0.0364 & + 0.0764 & = & + 0.0347 \\
+ 0.8518 & + 0.5671 & = & + 1.0000 & + 0.0764 & = & + 0.2055 \\
+ 0.0299 & + 0.5484 & = & - 0.2292 & + 0.1629 & = & + 0.0453 \\
+ 0.7944 & + 0.5484 & = & + 0.8766 & + 0.1629 & = & + 0.4411 \\
+ 0.2308 & + 0.4551 & = & - 0.4451 & + 0.3304 & = & + 0.1351 \\
+ 0.7228 & + 0.4551 & = & + 0.4876 & + 0.3304 & = & + 0.4932 \\
+ 0.3987 & + 0.2802 & = & - 0.2719 & + 0.3620 & = & + 0.0791 \\
+ 0.5777 & + 0.2802 & = & + 0.1863 & + 0.3620 & = & + 0.7890 \\
- 0.0037 & 0 & = & + 0.0426 \\
+ 0.0160 & 0 & = & + 0.1863,
\end{array}$$

worin $\log \alpha = 0.1533$ und $\log \nu = 9.4143$ ist.

Aus diesen Gleichungen ergaben sich die Normalgleichungen:

$$4.8171 (\alpha \delta \kappa) + 2.3744 \delta r = + 4.1761$$

$$2.3744 (\alpha \delta \kappa) + 2.5200 \delta r = + 1.7717.$$

Die Unbekannten und der mittlere und wahrscheinliche Fehler bestimmten sich dann wie folgt:

$$\delta r = - 0.0551 \quad r = 1.7997$$

$$\delta \kappa = + 0.1772 \quad \kappa = 0.8173$$

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{1.6264}{22}} \nu = \pm 0.271 \nu = \pm 0.0703 \text{ einer Helligkeit.}$$

$$\varepsilon_w = \pm 0.0474, \text{ dem wahrscheinlichen Fehler.}$$

Bemerkenswerth ist hier die Thatsache, dass der Werth von r fast genau gleich der Summe der beiden Halbmesser ist. Dies würde natürlich die Umdrehung der Körper als einer einzigen Masse bedingen. Da aber die Correction für κ ziemlich gross ist und der mittlere Fehler noch nicht befriedigend ist, darf man vermuthen, dass eine dritte Wiederholung der Rechnungen mit diesen letzten Elementen weitere merkliche Correctionen liefern würde. Desshalb habe ich die Rechnung nochmals wiederholt, indem ich $r = 1.8$ und $\kappa = 0.8$ setzte. Die Lichtcurve für diese Werthe der Elemente befindet sich in folgender Tafel, wo die J und δJ den in der obigen Tafel gewählten Zeiten entsprechen:

Minimum I		Minimum II	
J_R	δJ_{B-R}	J_R	δJ_{B-R}
0.9977	— 0.0026	0.9977	+ 0.0006
0.9885	— 0.0015	0.9897	+ 0.0009
0.9712	— 0.0034	0.9757	+ 0.0031
0.9454	+ 0.0076	0.9561	— 0.0002
0.9091	+ 0.0099	0.9309	+ 0.0080
0.8618	+ 0.0176	0.9003	+ 0.0120
0.7962	+ 0.0344	0.8586	+ 0.0218
0.7302	+ 0.0162	0.8251	+ 0.0098
0.6457	— 0.0264	0.7809	+ 0.0149
0.5511	— 0.0690	0.7340	— 0.0047
0.4496	— 0.0675	0.6858	— 0.0139
0.3548	— 0.0058	0.6425	+ 0.0027
0.3433	0	0.6365	0

Die Coëfficienten wurden mit den Angaben dieser Tafel berechnet und die resultierenden Bedingungsgleichungen waren:

$$\begin{array}{rcl}
 8.9367 (\alpha \delta \kappa) + 9.2035 \delta r & = & 8.5671 \nu \\
 8.8254 & + & 9.2035 = 8.3073 \\
 9.1194 & + & 9.5102 = 8.3372 \\
 6.9411 & + & 9.5102 = 8.4833 \\
 9.1609 & + & 9.6800 = 8.6926 \\
 9.3151 & + & 9.6800 = 9.0205 \\
 9.1483 & + & 9.7883 = 9.0419 \\
 9.4773 & + & 9.7883 = 7.8301 \\
 9.0629 & + & 9.8571 = 9.1567 \\
 9.6825 & + & 9.8571 = 9.4321 \\
 8.8575 & + & 9.8960 = 9.4066 \\
 9.8047 & + & 9.8960 = 9.6083 \\
 8.4109 & + & 9.9088 = 9.6977 \\
 9.8906 & + & 9.9088 = 9.8676 \\
 9.0979 & + & 9.8922 = 9.3706 \\
 9.9433 & + & 9.8922 = 9.7023 \\
 9.4645 & + & 9.8436 = 9.5827 \\
 9.9802 & + & 9.8436 = 9.5203 \\
 9.7016 & + & 9.7514 = 0.0000 \\
 0 & + & 9.7514 = 9.2012 \\
 9.8442 & + & 9.5821 = 9.9904 \\
 9.9634 & + & 9.5821 = 9.6721 \\
 9.7534 & + & 9.1265 = 9.9245 \\
 9.8665 & + & 9.1265 = 8.9605,
 \end{array}$$

wo $\log \nu = 9.1649$ und $\log \alpha = 0.1661$ ist.

Die Normalgleichungen sind:

$$6.6931 (\alpha \delta \kappa) + 4.7208 \delta r = -0.5536$$

$$4.7208 (\alpha \delta \kappa) + 8.2170 \delta r = +1.1378.$$

Hieraus wird

$$\alpha \delta \kappa = -0.3033 \nu, \quad \delta \kappa = -0.0479$$

$$\delta r = +0.3127 \nu, \quad \delta r = +0.0724$$

$$\kappa + \delta \kappa = 0.7521, \quad r + \delta r = 1.8724$$

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{4.11}{22}} = \pm 0.432 \nu = \pm 0.063 \text{ einer Helligkeit.}$$

Der wahrscheinliche Fehler ε_w ist $= \pm 0.0425$ einer Helligkeit.

Die Lichtverhältnisse und ihre Abweichungen von der mittleren Curve sind wieder für dieselben Zeiten wie zuvor nach den neuen Elementen berechnet:

Minimum I		Minimum II	
J_R	δJ_{B-R}	J_R	δJ_{B-R}
0.9975	— 0.0024	0.9975	+ 0.0008
0.9883	— 0.0013	0.9883	+ 0.0023
0.9741	— 0.0063	0.9741	+ 0.0047
0.9556	— 0.0026	0.9559	0
0.9243	— 0.0053	0.9313	+ 0.0076
0.8792	+ 0.0002	0.9007	+ 0.0116
0.8198	+ 0.0108	0.8650	+ 0.0154
0.7453	+ 0.0011	0.8242	+ 0.0158
0.6170	+ 0.0023	0.7789	+ 0.0118
0.5437	— 0.0616	0.7306	+ 0.0013
0.4473	— 0.0652	0.6825	— 0.0106
0.3477	+ 0.0015	0.6394	— 0.0058
0.3433	0	0.6365	0

Aus dem zuletzt abgeleiteten Werthe von κ finden wir, dass $\lambda = 0.3986$ und $q = 1.2036$ ist. Da nun diese Resultate nicht wesentlich von den in § 6 gefundenen abweichen, dürfen die dem vorigen Paragraphen zu Grunde gelegten Kreiselemente, folglich auch die daraus sich ergebenden elliptischen Elemente als die besten gelten, die aus der Argelander'schen Curve zu erhalten sind.

§ 9.

Spectroscopische Betrachtungen.

Obwohl das vorhandene Material ungemein gering ist, glaubte ich doch den Versuch einer Bestimmung der Bahn von β Lyrae auf Grund der in der Einleitung erwähnten Belopolsky'schen Spectrogramme unternehmen zu dürfen. Ich habe zu

diesem Zwecke die Methode Rambauts¹⁾ befolgt und der Veröffentlichung Belopolskys die nachstehenden Geschwindigkeitsangaben entnommen, an die bereits die Reduction auf die Sonne angebracht ist.

Tafel von beobachteten Geschwindigkeiten:

Datum	Geschwindigkeiten gegen die Sonne	
23.33 Sept.	— 11.2 Geogr. Meilen	— 83.13 Kilometer
24.37	— 11.6	— 86.10
27.33	+ 4.9	+ 36.37
30.33	+ 10.8	+ 80.16
2.33 Oct.	+ 1.7	+ 12.62
3.33	— 3.5	— 25.98
7.33	— 9.3	— 69.03
11.33	+ 10.3	+ 76.45
19.30	— 12.3	— 91.29
20.30	— 10.2	— 75.70
26.30	+ 10.7	+ 79.41
25.20 Nov.	— 7.2	— 53.44
26.20	— 10.7	— 79.41

Belopolsky nimmt eine kreisförmige Bahn an und bestimmt die Entfernung der Mittelpunkte zu 15804000 Kilometern.

Ich habe zunächst die relative Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Systems β Lyrae gegen die Sonne mittelst der Formel

$$V = \frac{1}{P} \int_{t_0}^{t_0 + P} \frac{dz}{dt} dt^2)$$

abgeleitet, worin V die gesuchte Geschwindigkeit, P die Periode und t_0 irgend eine Anfangsepoche ist.

Ich fand

$$V = -0.8 \text{ Kilometer,}$$

$$T = 26.93 \text{ Sept. 1892,}$$

$$e = 0.1076,$$

$$\tilde{\omega} = -79^\circ 17' \text{ vom Knoten aus gezählt,}$$

$$a \sin i = 15836000 \text{ Kilometern,}$$

$$P = 12.91 \text{ Tagen aus der Lichtwechselperiode.}$$

1) Mon. Not., Bd. LI, p. 316.

2) Siehe Astronomische Nachrichten 3242.

Hierin dürfen wir nach Ausweis der photometrischen Beobachtungen $\sin i = 1$, folglich $a = 15\,836\,000$ Kilometern setzen. Dies stimmt also ganz gut mit dem Belopolsky'schen Werthe überein.

Vermittelst dieser Elemente und der Gleichung

$$V = \frac{1}{2} (V_1 - V_2) \{e \cos \tilde{\omega} + \cos (v - \tilde{\omega})\}$$

berechnete ich die Werthe in der zweiten Reihe in der folgenden Tafel für die in der ersten Reihe angegebenen Zeiten. In der dritten Reihe befinden sich für dieselben Zeiten die von der Geschwindigkeitscurve abgelesenen Werthe. Aus den in der vierten Reihe angegebenen Unterschieden zwischen der 2. und der 3. Reihe erhellt, dass diese Elemente die gezeichnete Geschwindigkeitscurve in befriedigender Weise darstellen. Z ist vom Perihel aus gezählt.

Z	V_R	V_C	$V_C - V_R$	Z	V_R	V_C	$V_C - V_R$
+ 3.42	+ 81.1	+ 81.9	+ 0.8	— 2.58	— 84.5	— 81.5	+ 3.0
+ 2.42	+ 91.8	+ 91.8	0.0	— 3.58	— 86.5	— 86.5	0.0
+ 1.42	+ 76.5	+ 74.8	— 1.7	— 4.58	— 70.9	— 71.5	— 0.7
+ 0.42	+ 40.3	+ 38.1	— 2.2	— 5.58	— 43.8	— 46.3	— 2.5
0	+ 18.5	+ 18.5	0.0	— 6.58	— 10.4	— 13.9	— 3.5
— 0.58	— 12.9	— 10.6	+ 2.3	— 7.58	+ 25.2	+ 25.2	0.0
— 1.58	— 59.4	— 53.3	+ 6.1	— 8.58	+ 58.3	+ 60.0	+ 1.7

Ich möchte hier darauf aufmerksam machen, dass wegen des Nichtvorhandenseins von Punkten in der unmittelbaren Nähe eines Scheitels der Curve und weil gerade die Scheitel beinahe ausschliesslich e und $\tilde{\omega}$ bestimmen, diese letzteren Elemente als beträchtlich ungenauer als die anderen angesehen werden müssen. Jedoch wie ich die Curve gezeichnet habe und wenn die obigen von Belopolsky angegebenen Geschwindigkeiten nicht allzu unverlässlich sind, kann die Excentricität kleiner, kaum aber grösser sein.

Belopolsky hat in den obigen Messungen die Verschiebungen der hellen F -Linie des Sterns im Vergleich zu derselben künstlich erzeugten Linie gemessen. Von der durch seine Beobachtungen gezogenen Curve kann man desshalb die Geschwindigkeiten des die helle Linie erzeugenden Körpers in Bezug auf den Schwerpunkt des Systems ablesen. Aus diesen Geschwindigkeiten kann man dann nur die absolute Bahn des beobachteten Körpers ableiten. Die oben gegebenen Elemente sind desshalb diejenigen der absoluten Bahn.

Lockyer dagegen misst nach Angabe der „Proceedings of the Royal Society“, 1894, Bd. LVI, p. 278 die relative Verschiebung zweier dunkler Linien, wovon die eine durch den Hauptkörper, die andere durch den Nebenkörper erzeugt wird und leitet aus dieser

Verschiebung die relative Geschwindigkeit ab. Für den 24. August 1893 bestimmte er für dieselbe mittelst der relativen Verschiebungen der drei dunklen Linien H_γ , H_δ und λ_{4025} die folgenden Werthe:¹⁾

$$\begin{aligned} H_\gamma &= 155.0 \text{ engl. Meilen,} \\ H_\delta &= 154.0 \text{ " " ,} \\ \lambda_{4025} &= 158.0 \text{ " " ;} \end{aligned}$$

also beträgt die Geschwindigkeit im Mittel für den 24.46 August 1893,²⁾ 155.7 engl. Meilen = 250.5 Kilometer in der Secunde. Bringen wir die Reduction auf die Sonne für dieses Datum nämlich + 9.3 Kilometer an, so haben wir als Geschwindigkeit in der Gesichtslinie 259.8 Kilometer pro Secunde.

Obwohl es kaum gerechtfertigt erscheint, derartige von verschiedenen Forschern und unter ungleichen Verhältnissen angestellte Messungen ohneweiters miteinander zu vermischen, ist es doch möglich, über die Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung derselben ein Urtheil zu gewinnen, indem wir die Resultate der spectroscopischen und photometrischen Betrachtungen zusammen nehmen.

Aus Belopolskys Messungen erhalten wir den Durchmesser der absoluten Bahn eines der beiden Körper zu 31672000 Kilometern. Bekanntlich ist die absolute Bahn um den Schwerpunkt ähnlich der relativen Bahn eines Sternes um den andern. Nun ergibt sich aus der aus Belopolskys Messungen abgeleiteten absoluten Bahn die Geschwindigkeit in der Gesichtslinie im Momente der Lockyer'schen Beobachtung zu 82.0 Kilometern. Das Verhältniss der Lockyer'schen Geschwindigkeit zu dieser, 3.168, ist daher gleich dem Verhältniss der grossen Axen der relativen und absoluten Bahn. Die letztere fand sich oben zu 31672000 Kilometern, die erstere wird daher

$$2A = 100350000 \text{ Kilometern}$$

oder

$$A = 50175000 \text{ "}$$

Für das Verhältniss der Massen der Körper gilt:

$$\frac{a}{A} = \frac{m}{m + M}$$

Es folgt also, dass

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{2.168}$$

ist.

1) „Astronomy and Astro-Physics“ 1894, p. 577.

2) Nach einer einem Privatbriefe Lockyers entnommenen Mittheilung.

§ 10.

Lindemanns Curve. Schlussfolgerungen.

Wenden wir die Gleichungen (1), (2), (3) und (4) § 2 auf die von E. Lindemann abgeleiteten Hauptintervalle¹⁾

Min. I — Max. I	3 ^d 12 ^h
Max. I — Min. II	3 ^d 3 ^h 6
Min. II — Max. II	3 ^d 1 ^h 2
Max. II — Min. I	3 ^d 5 ^h

an, so finden wir, wenn wir den ersten beiden Hauptepochen Genüge leisten,

$$\tilde{\omega} = 139^{\circ} 04' \text{ vom I. Min. aus gezählt,}$$

$$e = 0.0564,$$

$$\tau = 4^{\text{d}} 666 = 4^{\text{d}} 15^{\text{h}} \text{ nach dem I. Min.}$$

Befriedigen wir aber die zweiten und dritten Hauptepochen, so haben wir

$$\tilde{\omega} = 127^{\circ} 10',$$

$$e = 0.0765,$$

$$\tau = 4^{\text{d}} 029 = 4^{\text{d}} 0^{\text{h}} 7 \text{ nach dem I. Min.}$$

Wenden wir, indem wir den aus der Argelander'schen Curve abgeleiteten Werth von e nämlich $e = 0.0176$ benützen, dieselben Gleichungen auf die Intervalle Min. I — Max. I, Min. I — Min. II und Min. I — Max. II der Reihe nach an, so bekommen wir:

$$\cos(M_1 + 49^{\circ} 57') = -\frac{0.0563}{e} = -3.204,$$

$$\cos(M_1 + 93^{\circ} 52') = -\frac{0.0338}{e} = -1.920,$$

$$\cos(M_1 + 136^{\circ} 23.5) = -\frac{0.01771}{e} = -1.010.$$

Da nun alle diese Werthe des Cosinus unmöglich sind, so erhellt, dass die Excentricität zwischen 1855 und 1890 zugenommen haben muss. Dies wird auch durch die Resultate der spectroscopischen Beobachtungen von Belopolsky bestätigt. Die Perihelbewegung lässt sich wegen der Unsicherheit der Perihellage für die frühere Epoche nicht bestimmen.

1) Siehe „Ueber den Lichtwechsel von β Lyrae nach Beobachtungen von Herrn J. Plassmann“, p. 493. E. Lindemann, Melanges math. et ast. T. VII, l. 3.

Da eine kleine Excentricität bei β Lyrae vorhanden ist und die Abplattung 0.167 beträgt, so ist der geläufige Ausdruck

$$(1) \quad M + m = \frac{A^3}{P^2}$$

zur Bestimmung der Summe der Massen nicht streng anwendbar. Diese Beziehung gilt bekanntlich nur bei Körpern, deren Anziehung durch diejenige ihrer in den Schwerpunkten concentrirten Massen ersetzbar ist. Das strenge Verfahren würde im vorliegenden Falle darin bestehen, das Potential des grösseren Ellipsoids für einen äusseren Punkt zu berechnen, der irgend eine Lage innerhalb des Volumens des kleineren Ellipsoids einnimmt und dieses Potential über den ganzen Raum des kleineren zu integrieren. Der Differentialquotient dieses Integrals nach A genommen, gleich der Centrifugalkraft gesetzt, würde natürlich das strenge Verhältniss liefern. Des verhältnissmässig kleinen Mittelpunktsabstandes wegen dürfte man aber in diesem Falle überhaupt keine Vernachlässigungen machen, folglich würde die Durchführung dieser Aufgabe hier umständlich sein und da es sich hier bloss um mehr oder weniger rohe Annäherungen handelt, habe ich mir erlaubt, die obige Gleichung zu benützen, indem ich mir die Ellipsoide durch Kugeln ersetzt dachte.

Nennen wir nun die grosse Halbaxe der relativen Bahn A , das Verhältniss der mittleren Dichtigkeit des helleren zu derjenigen des dunkleren Körpers δ' , und lassen wir den anderen Buchstaben ihre frühere Bedeutung, so haben wir folgende Beziehungen:

$$(2) \quad \frac{A}{a} = \frac{M + m}{M} = 1 + \delta' \kappa^3$$

oder

$$(3) \quad \frac{A}{a} = \frac{M + m}{m} = 1 + \frac{1}{\delta' \kappa^3},$$

je nachdem Belopolsky die Verschiebungen vom kleineren oder grösseren Körper gemessen hat, worin nach Angabe des vorigen Paragraphen

$$\frac{A}{a} = 3.168$$

ist. Nach den in § 7 angegebenen Resultaten der photometrischen Betrachtungen ist

$$\kappa = 0.7528;$$

folglich ergibt sich aus (2)

$$\delta' = 5.083$$

und aus (3)

$$\delta' = 1.081.$$

Da es nun höchst unwahrscheinlich ist, dass die kleinere der beiden äusserst nahe neben einander stehenden Componenten eine 5 mal so grosse Dichtigkeit als die grössere besitzt, so schliessen wir aus den beiden letzten Werthen von δ' , dass Belopolsky den grösseren Körper beobachtet hat.

Auf den ersten Blick scheint es nun kaum denkbar, dass der dunklere Körper die helle F -Linie im Spectrum deutlicher zeigen würde als der hellere. Nehmen wir aber an, dass diese Linie durch einen schwereren Bestandtheil der atmosphärischen Hülle hervorgebracht wird, so können wir uns ohne alle Schwierigkeit vorstellen, wie die aus den Messungen Belopolskys abgeleiteten Geschwindigkeiten dem grösseren Körper angehören können, denn die fragliche schwerere Substanz hätte stets das Bestreben, in grösstmöglicher Nähe des Schwerpunktes des Systems eine Gleichgewichtslage einzunehmen. Da nun der grössere Körper zugleich der dunklere, daher vermuthlich auch etwas dichter als der kleinere ist, obwohl die Dichtigkeiten fast gleich zu sein scheinen, so könnte der Schwerpunkt des Systems weit innerhalb der Masse, vielleicht sogar in der unmittelbaren Nähe des geometrischen Centrums des grösseren Körpers liegen, und es wäre keineswegs undenkbar, dass die die F -Linie erzeugende Substanz dem kleineren Körper zum Theil wenigstens, vielleicht auch zum grossen Theil, entzogen würde. Es wird dabei jedoch durchaus nicht behauptet, dass die Helligkeit des dunkleren Körpers, obgleich dieselbe bloss 0.4 derjenigen des helleren beträgt, unbedeutend ist. Wir brauchen uns also bloss zu denken, dass die in der umhüllenden Atmosphäre des kleineren Körpers befindliche Menge des fraglichen Stoffes so gering ist, dass diese Linie vom kleinen Körper nicht in hinreichender Stärke erzeugt wird, um deutlich gemessen werden zu können.

Substituiren wir in die Gleichung (1) den abgeleiteten Werth von A , nämlich 50175000 Kilometer in astronomischen Einheiten, und den Werth von P , in Jahren ausgedrückt, so finden wir

$$M + m = 30.56 \text{ Sonnenmassen.}$$

Da nun aus § 9

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{2.168}$$

ist, so haben wir

$$M = 20.91 \text{ Sonnenmassen}$$

und

$$m = 9.65 \text{ Sonnenmassen.}$$

Bezeichne jetzt

S die Sonnenmasse,

H den Sonnenhalbmesser,

R', R die grosse bzw. kleine Halbaxe des grösseren Ellipsoids,

δ_1 das Verhältniss der Dichtigkeit des grösseren Ellipsoids zur Sonnendichtigkeit,

δ_2 " " " " " kleineren " " "

q " " $\frac{R'}{R}$;

dann können wir schreiben:

$$\frac{M}{S} = \delta \frac{R' R^2}{H^3} = \frac{\delta}{q^2} \left(\frac{R'}{H} \right)^3$$

oder

$$(4) \quad \delta_1 = \left(\frac{M}{S} \right) q^2 \left(\frac{H}{R} \right)^3.$$

Aus den in § 7 angegebenen Elementen haben wir

$$R = \frac{A}{1.9366} = 25\,908\,000 \text{ Kilometern.}$$

H ist bekanntlich 697150 Kilometer und $\frac{M}{S} = 20.91$.

Substituieren wir diese und die in § 7 angegebenen Zahlenwerthe der Grössen, so erhalten wir

$$\delta_1 = 0.00058$$

und da

$$\delta_2 = 1.08 \delta_1$$

ist, so haben wir

$$\delta_2 = 0.00063.$$

Es folgt also hieraus, dass die mittlere Dichtigkeit des Systems fast genau 0.0006 der Sonnendichtigkeit beträgt. Man kann die mittlere Dichtigkeit auch direct berechnen und zwar wie folgt:

Der Durchmesser der Sonne D in der Entfernung Erde — β Lyrae wird durch die Formel

$$D' = 2 p \sin H'' = 0.00933 p$$

gegeben, worin p die Parallaxe von β Lyrae, und $H'' = 16' 02''$ d. h. der Sonnendurchmesser von der Erde aus gesehen ist.

Drücken wir A in (1) als Winkelgrösse aus, so wird diese Gleichung zu

$$M + m = \left(\frac{A''}{p} \right)^3 \frac{1}{P^2}.$$

Bedeute nun

δ die mittlere Dichtigkeit des Systems in Einheiten der Sonnendichtigkeit,

d'' den Durchmesser einer Kugel, deren Masse gleich $M + m$ ist,

so können wir

$$M + m = \delta \left(\frac{d''}{D'} \right)^3 = \delta \frac{d''^3}{(0.00933 p)^3}.$$

schreiben. Aus den letzten zwei Gleichungen folgt sofort, dass

$$\delta = \left(\frac{A}{d} \right)^3 \frac{(0.00933)^3}{P^2}$$

ist. Da nun

$$\left(\frac{d}{2} \right)^3 = R' R^2 + B' B^2 = \frac{R^3}{q^2} (1 + \kappa^3)$$

und aus § 7

$$A = 1.9366 R'$$

ist, so ergibt sich

$$\delta = \frac{(1.9366)^3 (0.00466)^3}{P^2 (1 + \kappa^3)} q^2.$$

Substituirt man die Zahlenwerthe für P , $1 + \kappa^3$ und q^2 aus § 7, so findet man

$$\delta = 0.0006,$$

einen Werth also, der, wie zu erwarten war, zwischen den beiden Werthen von δ_1 und δ_2 liegt.

Die mittlere Dichtigkeit des Systems beträgt also weniger als ein Tausendstel der mittleren Sonnendichtigkeit oder beinahe ein Tausendstel der Dichtigkeit des Wassers.

Schlussfolgerungen.

Fasse ich die Ergebnisse dieser Untersuchungen kurz zusammen, so ergibt sich Folgendes:

Die photometrischen Beobachtungen der Variabilität von β Lyrae können innerhalb befriedigender Grenzen durch die Trabantentheorie erklärt werden.

Es haben sich die folgenden Verhältnisse des Systems herausgestellt:

Die beiden Körper des Systems können als gleich abgeplattete Ellipsoide betrachtet werden.

Die Bahn der Körper umeinander ist beinahe kreisförmig und die Ebene derselben ist fast genau gegen die Sonne gerichtet.

Die gemeinsame Abplattung der Ellipsoide weicht nicht beträchtlich von 0.17 ab und die Umdrehungs- und Umlaufsperioden sind einander gleich (abgesehen von etwaigen Librationen) und betragen 12.91 Tage.

Die Helligkeit des grösseren Körpers ist 0.4 derjenigen des kleineren.

Die Entfernung der Mittelpunkte ist ungemein gering, annäherungsweise $17/8$ der grösseren Halbaxe des grösseren Ellipsoids.

Aus den Hauptepochen für 1890, wie sie von Lindemann angegeben sind, ergibt sich, dass die Excentricität seit 1855 zugenommen haben muss, womit die spectroscopischen Beobachtungen von Belopolsky in Uebereinstimmung sind.

Die Bewegung des Schwerpunktes des Systems in Bezug auf die Sonne ist sehr klein.

Die grössere Halbaxe der Bahn des Begleiters beträgt etwas mehr als 50 Millionen Kilometer.

Die Masse des grösseren Körpers ist 21 mal, und diejenige des kleineren 9.5 mal grösser als die Sonnenmasse.

Die Dichtigkeiten der beiden Körper sind einander fast gleich.

Die mittlere Dichtigkeit des Systems ist sehr gering.

Falls Belopolsky die Verschiebungen der durch den grösseren Körper erzeugten *F*-Linie gemessen hat, zeigten die spectroscopischen und photometrischen Beobachtungen keine Widersprüche, vielmehr lässt sich, wenn wir auch die Messungen Lockyers für Aug. 24, 1893 in Betracht ziehen, eine merkwürdige Uebereinstimmung constatiren.

Einige Schlussbemerkungen über gewisse Eigenthümlichkeiten des Spectrums von β Lyrae dürften an dieser Stelle vielleicht nicht unangebracht sein. Das starke Absorptionsspectrum bei β Lyrae deutet auf das Vorhandensein einer energisch absorbirenden, atmosphärischen Hülle hin, deren Beschaffenheit und Verbreitung über die Oberflächen der Componenten für die Helligkeit des durch die Hüllen gesehenen leuchtenden Kerns maassgebend wäre. Da nun die Componenten so äusserst nahe beieinander stehen, würden die Atmosphären, vielleicht sogar die Körper selbst sich höchst wahrscheinlich berühren, und es ist selbst möglich, dass sie eine einzige Gleichgewichtsfigur bilden.

In einem solchen System nähme bekanntlich die Atmosphäre des ganzen Systems eine derartige Gleichgewichtslage ein, dass diejenigen Punkte der Atmosphäre, wo dieselbe Dichtigkeit herrscht, in derselben Potentialfläche liegen würden. Die Potentialflächen, die in der unmittelbaren Nähe der Oberfläche liegen, passten sich mehr oder weniger genau der Gestalt der Oberfläche an und folglich wären diese Potentialflächen, falls die beiden Körper noch nicht getrennt sind, in der Nähe der Einschnürung der Masse, falls sie aber schon getrennt sind, in den zwischen den engstehenden Componenten befindlichen Gegenden der Atmosphäre, stark nach innen gekrümmt. Bei zunehmender Entfernung von der Oberfläche des Körpers gleichen sich aber diese Potentialflächen aus und werden daher mehr und mehr zu Kugelflächen, deren Mittelpunkte der Schwerpunkt des Systems ist. Dehnt sich nun die Atmosphäre von β Lyrae sehr weit in den Raum hinein aus, wie es aller Wahrscheinlichkeit nach der Fall ist, so würde sie annähernd eine Kugelgestalt annehmen, deren Centrum der Schwerpunkt ist. Setzen wir voraus, dass die beiden Componenten, seien sie getrennt oder nicht, gleiche Lichtintensitäten besitzen, so müsste der kleinere Körper heller erscheinen als der grössere, denn der letztere würde eine tiefere Luftschicht durchstrahlen müssen als der erstere. Dies könnte natürlich sogar auch dann noch der Fall sein, wenn der kleinere an sich selbst thatsächlich der dunklere wäre.

Wenn nun, wie schon oben angedeutet, diejenigen Theile der Masse des grösseren Körpers, die jenseits seines geometrischen Centrums liegen, eine grössere Dichtigkeit besässen als die übrigen, so würde der Schwerpunkt, folglich auch die ganze Luftmenge vom kleineren Körper fortgezogen und derselbe noch weiter blossgelegt werden. Da die schwereren Bestandtheile sich in die grösstmögliche Nähe des Schwerpunktes des Systems begeben würden, so wäre es zum Mindesten denkbar, dass an dem entfernteren Ende des kleineren Körpers nur eine dünne Schicht oder auch gar keine Atmosphäre vorhanden wäre, obwohl das System in seiner Gesammtheit eine mächtig absorbirende Atmosphäre besitzen mag.

Es möge noch erwähnt werden, dass eine solche Vertheilung der Atmosphäre von β Lyrae ganz gut die starken Absorptionsbänder erklärt, die sich zur Zeit des ersten

Minimums so deutlich im Spectrum zeigen, da zu jener Zeit der grosse Körper, der in einer ihn dicht einhüllenden Atmosphäre liegt, allein scheint. Zu derselben Zeit würde das continuirliche Spectrum am schwächsten sein, weil der kleine Körper, der am deutlichsten das continuirliche Spectrum zeigen müsste, dann total verdeckt wird. Dies stimmt auch mit den Beobachtungen überein.

Obwohl nun die obigen Erwägungen vielleicht hier und da gewagt scheinen mögen, so darf man nicht vergessen, dass in dem System β Lyrae ganz eigenthümliche Verhältnisse herrschen müssen, deren Erklärung selbstverständlich einen etwas ungewöhnlichen Character annehmen wird.

Dass beide Ellipsoide ähnlich sind, ist eine willkürliche Annahme.

Der Rotationscharacter dagegen ist voraussichtlich eine erlaubte Näherung, weil solche Figuren in der That in speciellen Fällen (Mars) auftreten.

Am Schlusse ist noch besonders zu betonen, dass man auf dem Wege der formellen Darstellungen dazu gekommen ist, einen einzigen Körper (Poincaré, Darwin) anzunehmen. Die früheren Rechnungen besitzen also nur mehr eine formelle Bedeutung. Wegen des kargen zu Verfügung stehenden Vorraths des Beobachtungsmaterials bei β Lyrae aber könnte die weitere Verfolgung dieser Untersuchungen nicht lohnend sein.

Die beistehende Figur diene dazu, einen Ueberblick über die Verhältnisse des Systems zu geben.

Zum Schlusse spreche ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Seeliger, meinen Dank aus für seine mannigfache Hülfe und Belehrung, deren ich mich sowohl früher als während der Ausführung dieser Arbeit zu erfreuen hatte.

Fig. 6.

— Argelanders Curve.
 - - - Berechnete Curve.

Überblick über das System β Lyrae.

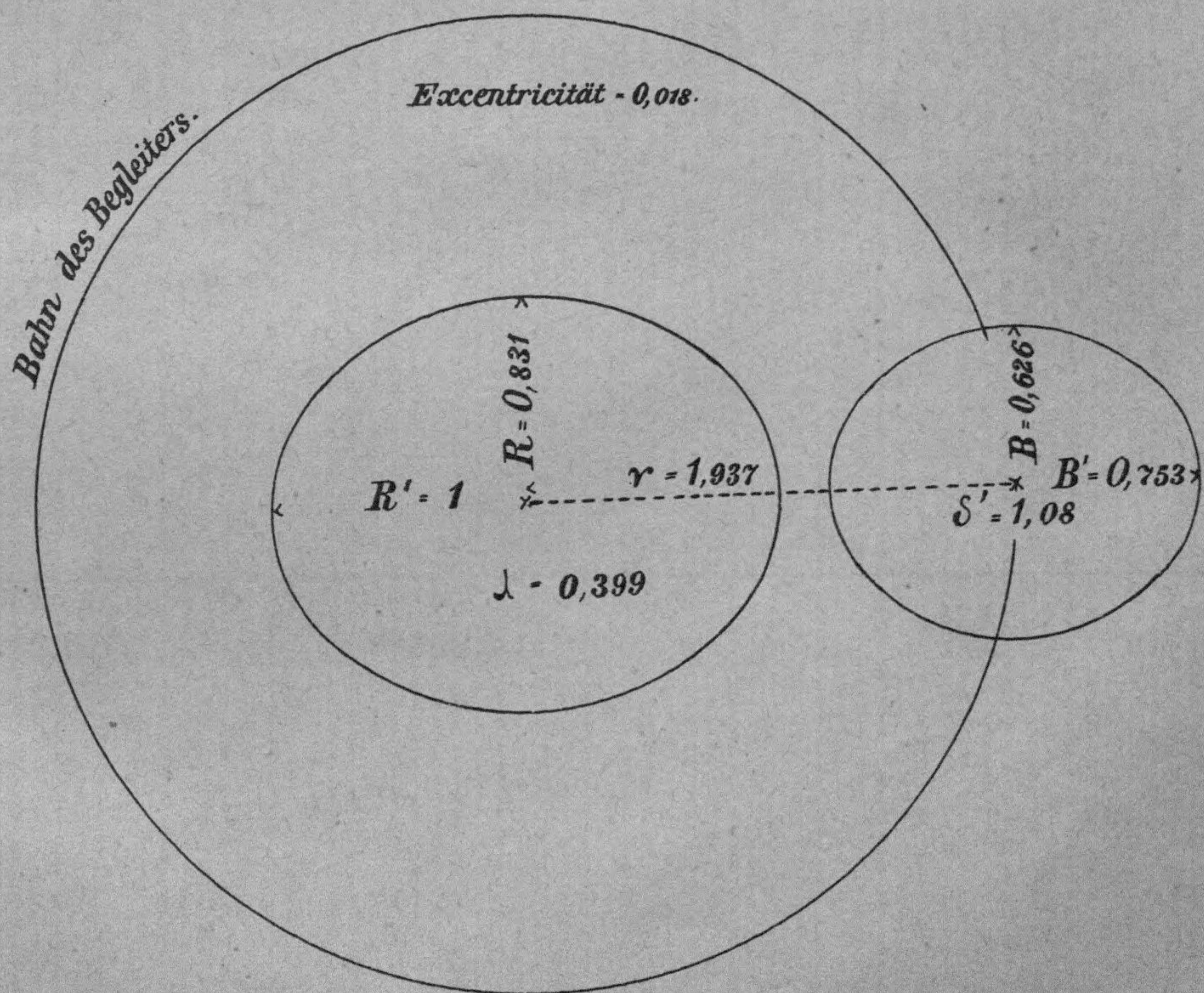


Fig. 7.



Myers, G. W.

Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes beta Lyrae

München 1896

4 Astr.p. 301

urn:nbn:de:bvb:12-bsb00070524-6